

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ КНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря Сікорського»

ГІЛЬЧУК А.В., ХАЛАТОВ А.А.

ТЕОРІЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Частина 1

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Фізико-технічного інституту

Протокол № 10 від 24.05.2017

Київ 2017

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ I. ЗАКОН ФУР'Є ТА РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	7
1.1. Види теплообміну	7
1.2. Закон Фур'є і коефіцієнт теплопровідності	10
1.3. Закон Ньютона	13
1.4. Диференційне рівняння теплопровідності	14
Контрольні питання	21
РОЗДІЛ II. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ БЕЗ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ	22
2.1. Одновимірне температурне поле	22
2.1.1. Теплопровідність і теплопередача через пласку стінку	22
2.1.2 Теплопровідність і теплопередача через циліндричну стінку	28
2.1.3 Теплопровідність і теплопередача через багат шарову пласку стінку. Аналогія з ланцюгами електричного струму	35
2.1.4 Теплопровідність і теплопередача через багат шаровий циліндр	43
2.1.5 Критична товщина теплової ізоляції	46
2.1.6 Теплопровідність і теплопередача через сферичну стінку	48
2.2. Двовимірне температурне поле	51
2.2.1. Двовимірне температурне поле в напівобмеженій адіабатній пластині	51
2.2.2. Двовимірне температурне поле в довгому суцільному напівциліндрі	56

Контрольні питання	61
РОЗДІЛ III. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ З ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ	64
3.1. Суцільний круглий стрижень	64
3.2. Місцеве джерело теплоти в пластині при неадіабатних умовах	69
3.2. Температурне поле в електричних котушках	72
3.2.1 Температурне поле суцільної електричної котушки	73
3.2.2 Температурне поле порожнистої електричної котушки	81
Контрольні питання	84
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	86

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

t – температура, $^{\circ}\text{C}$

Δt – перепад температур, K

τ – час, c

\vec{n}_0 – нормаль до поверхні

Q_{τ} – кількість теплоти, Дж

Q – тепловий потік, Вт

\vec{q} – густина теплового потоку, Вт/м^2

q_v – об'ємна густина внутрішніх джерел теплоти, Вт/м^3

F – площа поверхні перерізу, м^2

λ – теплопровідність матеріалу, Вт/м

α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/м^2

c – питома теплоємність

k_B – постійна Больцмана

x, y, z – Декартові координати

r, φ, z – циліндричні координати

ВСТУП

Явище теплопровідності має велике значення в багатьох галузях сучасної техніки. Суттєву роль відіграють процеси теплопровідності в енергетиці, авіації, суднобудуванні, ракетобудуванні, промисловості та газотранспортній системі. Розрахунок енергетичних установок, робочих процесів, теплового захисту тощо. повністю ґрунтується на теорії теплопровідності. Саме тому, теплопровідність є фундаментальним поняттям для майбутнього спеціаліста в галузі енергетичних систем.

В даному посібнику розглядаються типові задачі теорії теплопровідності та їх розв'язки методом розділення змінних. Теорія широко підкріплена прикладами реальних систем. Після кожного розділу є перелік питань для самоконтролю.

У першому розділі даного посібника вводяться основні поняття теорії теплопровідності; дається формулювання основних рівнянь, їх часткових випадків та умови однозначності для них.

Другий розділ присвячено розгляду стаціонарних одно- та двовимірних систем без внутрішніх джерел тепла. Наведено рішення стаціонарних рівнянь теплопровідності для напівобмеженої пластини, нескінченного циліндра і кулі; розглянуто багат шарові системи; введено поняття критичної товщини шару ізоляції. Також розглянуто розв'язки рівнянь теплопровідності у випадку систем скінченних розмірів.

В третьому розділі мова йде про стаціонарні системи з внутрішніми джерелами теплоти. Наведено постановки задач та їх вирішення для: суцільного стрижня з рівномірним розподілом джерел теплоти; неадіабатної пластини з циліндричним джерелом теплоти; електричних котушок.

В четвертому розділі вводяться деякі критерії подібності і розглядаються нестаціонарні системи. Спочатку розглядаються часткові випадки систем з суттєво різними внутрішнім і зовнішнім тепловими

опорами. Потім розглядаються загальні випадки. Дано постановки задач та їх вирішення на прикладі нескінченної нитки, пластини, циліндра та кулі.

У п'ятому розділі надано відомості про деякі способи керування інтенсивністю теплообміну. Зокрема розглянуто метод інтенсифікації теплообміну шляхом ребрення поверхонь, що зазнають теплообміну. Наведено точні розв'язки рівнянь теплопровідності для ребер простої геометрії (прямокутного, циліндричного), а також показано спрощені методи обрахунку, що використовуються на практиці. Також в даному розділі розглянуто теплопередачу через пористу стінку.

В додатках наведено теорію стосовно функцій Бесселя та рядів Фур'є, яка необхідна для знаходження розв'язків рівнянь теплопровідності.

Курс «Теорія теплопровідності» пов'язаний з такими предметами як: «Термодинаміка», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики» та є підґрунтям для вивчення дисципліни «Основи конвективного теплообміну».

Даний посібник призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю «Прикладна фізика і наноматеріали», але також буде корисним для студентів енергетичних та теплофізичних спеціальностей, аспірантів, інженерів, наукових співробітників і викладачів.

РОЗДІЛ I. ЗАКОН ФУР'Є ТА РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1. Види теплообміну

Теплообмін – вчення про самовільні незворотні процеси поширення тепла в просторі від більш нагрітих тіл до менш нагрітих. Під процесом поширення теплоти розуміють обмін внутрішньою енергією між окремими елементами, областями середовища, що розглядається. Теплообмін розділяється на простий і складний. До простого теплообміну належать:

- теплопровідність – процес переносу теплоти структурними частинками речовини (нагрів ствола пушки, нагрів провідника по якому тече струм).
- конвекція – процес переносу теплоти потоками самої речовини в просторі з області з однією температурою в область з іншою. Розрізняють природню і вимушену конвекцію або ламінарну і турбулентну (природня – нагрівання рідини, повітря в кімнаті, утворення хмар; вимушена – перемішування рідини (мішалкою, ложкою, насосом і т.і.)).
- радіаційний або променевий теплообмін – процес переносу теплоти електромагнітними хвилями (сонячна радіація).

Складні види теплообміну комбінуються з простих. До складного виду теплообміну належать:

- тепловіддача – теплообмін між теплоносієм і поверхнею;
- теплопередача – передача теплоти від одного теплоносія до іншого через розділюючу стінку;
- радіаційно-конвективний – теплообмін, що обумовлений випромінюванням, конвекцією та теплопровідністю одночасно.

Тепловий потік Q – величина, що характеризує зміну кількості теплоти в просторі з часом.

$$Q = \frac{\delta Q_\tau}{d\tau} \quad (1.1)$$

δQ_τ – зміна кількості теплоти за час $\delta\tau$.

Густина теплового потоку q – тепловий потік, віднесений до одиниці площі поверхні.

$$q = \frac{dQ}{dF} \quad (1.2)$$

Температурне поле $t(x, y, z, \tau)$ – сукупність миттєвих значень температур в просторі. Розрізняють стаціонарне та нестаціонарне температурні поля.

Коли температура змінюється з часом від однієї точки простору до іншої, таке поле відповідає тепловому режиму теплопровідності, що не встановився, і називається нестаціонарним температурним полем. Якщо тепловий режим встановився, то температура в кожній точці поля залишається сталою в часі і таке температурне поле називається стаціонарним (*рис. 1.1*). В цьому випадку температура є функцією лише координат. Температурне поле, відповідає рівнянню $t = t(x, y, z)$ і є просторовим, так як температура є функцією трьох координат. Якщо температура є функцією двох просторових координат, то поле називається двовимірним, а його запис має вигляд:

$$t = t(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Якщо температура є функцією однієї просторової координати, таке поле називається одномірним:

$$t = t(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

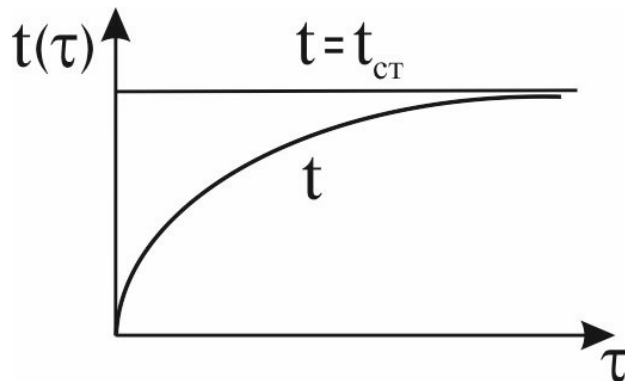


Рис. 1.1. Зміна температури з часом [1]

Поверхні, на яких температура залишається сталою, називають ізотермічними. Через кожну точку всередині тіла можна провести в даний момент часу тільки одну ізотермічну поверхню. По розташуванню ізотерм оцінюють інтенсивність зміни температури в різних напрямках: чим густіше розташовані ізотерми, тим інтенсивніше змінюється температура. Введемо поблизу точки A дві ізотерми з різницею температур Δt і відстанню вздовж нормалі Δn між ними. На рис.1.2 зображені сліди двох різних ізотермічних поверхонь в фіксований момент часу [3].

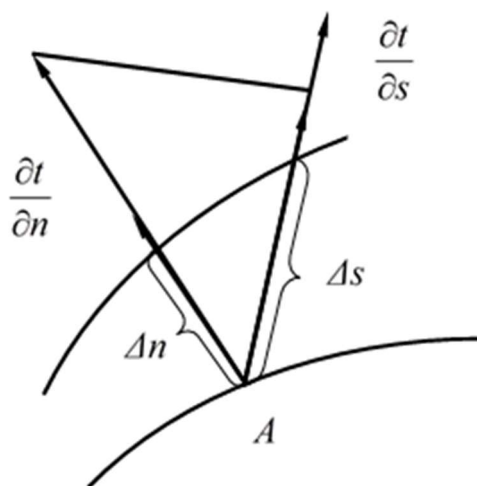


Рис. 1.2. Ізотермічні поверхні [3]

Вздовж ізотерми температура не змінюється, в будь-якому іншому напрямку змінюється, причому в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні спостерігається найбільша зміна температури на одиницю довжини. Зростання температури в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні характеризується відношенням зміни температури Δt між вибраними ізотермами до відстані між ними по нормалі Δn . Границя цього відношення при прямуванні Δn до нуля називається градієнтом температури ($\text{grad } t$).

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \vec{n}_0 = \text{grad}(t), \quad (1.5)$$

де \vec{n}_0 – одиничний вектор, напрямлений по нормалі в бік зростання температури (*рис. 1.2*); $\partial t / \partial n$ – похідна температури по напрямку нормалі.

Інтенсивність зміни температури в напрямку s (*рис. 1.2*) визначається границею відношення $\partial t / \partial s$ при $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\partial t}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} \cdot \cos(\hat{\vec{n}, \vec{s}}) \quad (1.6)$$

За додатній напрямок градієнту температури приймають напрямок, в якому температура зростає. Лінії, перпендикулярні до ізотермічних поверхонь, називають лініями теплового потоку, або, коротше, лініями току.

1.2. Закон Фур'є і коефіцієнт теплопровідності

Взаємозв'язок між густиною теплового потоку \vec{q} і градієнтом температури $\vec{\nabla} t$ виражає закон Фур'є:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \vec{n}_0, \quad (1.7)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності.

Коефіцієнт теплопровідності λ – густина потоку теплоти при градієнті температури рівному одиниці. Характеризує здатність речовини проводити теплоту.

Вектор густини теплового потоку \vec{q} направлений по нормалі до ізотермічної поверхні. Його додатній напрямок співпадає з напрямом зменшення температури, так що теплота завжди передається від більш гарячих частин тіла до холодних. Таким чином, вектори \vec{q} та $\text{grad}(t)$ лежать на одній прямій, але напрямлені в протилежні сторони. Це і пояснює наявність знаку «мінус» в правій частині рівняння (1.7).

Коефіцієнт теплопровідності λ є фізичним параметром речовини. В загальному випадку він залежить від температури, тиску та роду речовини. Діапазони зміни λ для різних матеріалів наведено на *рис. 1.3*.

Для газів, при збільшенні температури і тиску, коефіцієнт теплопровідності росте за законом:

$$\lambda = \frac{9k - 5}{8} \bar{\omega}_m c_v \Delta \rho \quad (1.8)$$

де k – показник адіабати ($k = c_p / c_v$); $\bar{\omega}_m$ – середньоквадратична швидкість молекул; c_v – теплоємність газу при сталому об'ємі; Δ – довжина вільного пробігу молекул; ρ – густина газу.

При збільшенні температури рідин, їх коефіцієнт теплопровідності зменшується, крім води і гліцерину. Матеріали, для яких $\lambda < 2,5$ Вт/м·К називають теплоізоляторами. Неметалічні матеріали характеризуються анізотропією (властивості матеріалів в різних напрямках різні) і пористістю:

$$\lambda = \lambda_c (1 - P) \quad (1.9)$$

де λ_c – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; Π – коефіцієнт пористості матеріалу.

Метали дуже чутливі до нейтронного та γ випромінювання. Найкращими провідниками серед металів є срібло Ag та мідь Cu. відомо, що речовини, які мають хорошу електропровідність, є також хорошими теплопровідниками. Зв'язок між коефіцієнтами електропровідності та теплопровідності встановлює закон Відемана-Франца:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3e^2} k_B^2 T \quad (1.10)$$

де σ – електропровідність; e – елементарний електричний заряд; k_B – стала Больцмана; T — абсолютна температура.

Зв'язок між теплопровідністю та електропровідністю обумовлена тим, що головний внесок в ці процеси в металах дають одні й ті самі механізми – розсіяння електронів провідності. Закон Відемана-Франца в цілому справедливий при високих і низьких температурах, але може бути неточним при проміжних температурах.

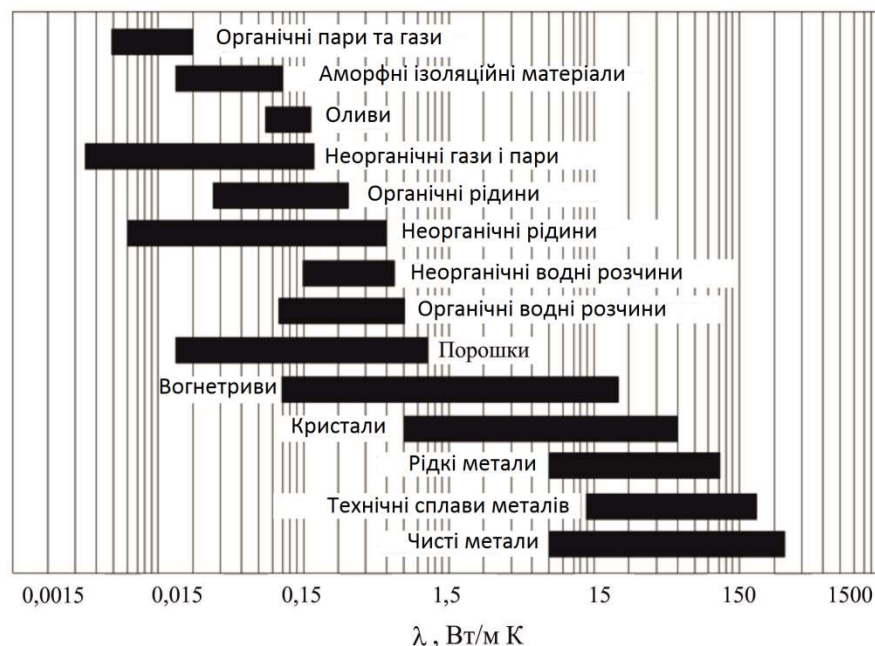


Рис. 1.3. Порядок величин та коефіцієнтів теплопровідності різних речовин

На основі уявлень сучасної фізики, явища природи взагалі і теплопровідності зокрема, можливо описати і дослідити на основі феноменологічного та статистичного методів. Метод опису процесу, що ігнорує мікроскопічну структуру речовини, і розглядає її як суцільне середовище (континуум), називається феноменологічним. Феноменологічний метод дослідження дає можливість встановити деякі загальні співвідношення між параметрами, що характеризують досліджуване явище в цілому. Феноменологічні закони носять доволі загальний характер, а роль конкретного фізичного середовища враховується коефіцієнтами, що визначаються безпосередньо з досліду.

Інший шлях вивчення фізичних явищ базується на дослідженні внутрішньої структури речовини. Середовище розглядається як деяка фізична система, що складається з великої кількості молекул, іонів або електронів з заданими властивостями та законами їх взаємодії. Одержання макроскопічних характеристик по заданим мікроскопічним властивостям середовища складає основну задачу статистичного методу [2].

1.3. Закон Ньютона

При конвективному теплообміні між твердим тілом та теплоносієм (рис. 1.4) зв'язок між густиною потоку теплоти q з температурами поверхні тіла t_w та рідини T_f встановлюється формулою Ньютона:

$$q = \alpha(t_f - t_w) \quad (1.11)$$

де t_f – температура теплоносія; t_w – температура стінки; α – коефіцієнт тепловіддачі, який може також враховувати теплообмін випромінюванням.

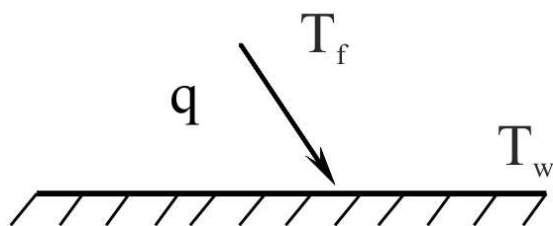


Рис. 1.4. Поверхня твердого тіла

Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією, чисельно характеризує тепловий потік, який розсіює або поглинає одиниця поверхні твердого тіла, при різниці температур між твердим тілом та теплоносієм в один Кельвін. Одиниця вимірювання коефіцієнта тепловіддачі в системі СІ – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

Коефіцієнт тепловіддачі залежить від:

- виду теплоносія та його температури;
- температурного напору, виду конвекції (вимушена, вільна) та режиму течії (ламінарна, турбулентна);
- стану поверхні (шорсткість) та напрямку обтікання;
- форми та розмірів тіла.

$$\alpha = f(t_f, \lambda, c, \rho, \mu, \bar{w}_m \dots) \quad (1.12)$$

Тому α – функція процесу, а не таблична величина. Визначається, як правило, експериментально з використанням рівнянь подібності. Більш детально це питання буде розглянуто в курсі «Основи конвективного теплообміну».

1.4. Диференційне рівняння теплопровідності

Вивчення будь-якого фізичного явища зводиться до встановлення залежності між величинами, що характеризують це явище. Для складних фізичних процесів, в яких основні величини можуть суттєво змінюватись в

просторі і часі, встановити залежність між цими величинами дуже складно. В цих випадках в нагоді стає метод математичної фізики, який виходить з того, що обмежується проміжок часу і з усього простору розглядається лише елементарний об'єм. Це дозволяє в межах елементарного об'єму та вибраного малого інтервалу часу, знехтувати зміною деяких величин, що характеризують процес і суттєво спростити залежність між величинами [2].

Введемо Декартову систему координат в середовищі з рухомих теплоносієм і розглянемо в ній елементарний об'єм (рис.1.5) $dV = dxdydz$.

Припущення відносно властивостей середовища:

- тіло однорідне та ізотропне;
- фізичні параметри сталі ($\lambda, \rho, c = const$);
- деформація об'єму, що розглядається, яка пов'язана зі зміною температури, є дуже малою величиною в порівнянні з самим об'ємом;
- внутрішні джерела теплоти в тілі, які в загальному випадку можуть бути задані як $q_v = f(x, y, z, \tau)$, розподілені рівномірно.

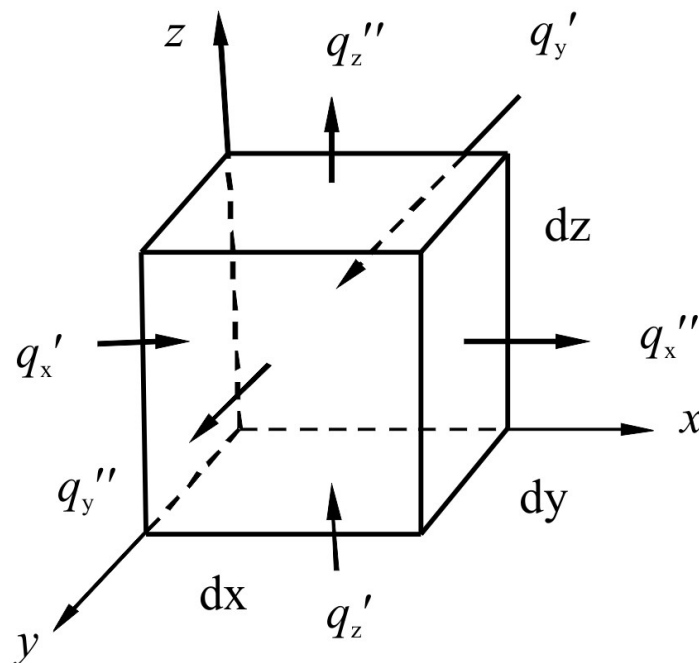


Рис. 1.5. Елементарний об'єм

Закон збереження теплоти для елементарного об'єму:

$$\delta Q_{\tau 1} + \delta Q_{\tau 2} = \delta Q_{\tau 3} \quad (1.13)$$

де $\delta Q_{\tau 1}$ – кількість теплоти, що входить в елементарний об'єм шляхом теплопровідності за час $d\tau$; $\delta Q_{\tau 2}$ – кількість теплоти, що виділилось за час $d\tau$ за рахунок внутрішніх джерел; $\delta Q_{\tau 3}$ – зміна ентальпії в елементарному об'ємі за час $d\tau$.

Ентальпія $I(S, N, P, x_i)$ – повна енергія системи:

$$I(S, N, P, x_i) = U + PV, \quad (1.14)$$

де S – ентропія; N – число частинок в системі; P – тиск; x_i – інші макроскопічні параметри системи.

$$\delta Q_{\tau 2} = q_v dx dy dz d\tau \quad (1.15)$$

$$\delta Q_{\tau 3} = mcdt = \rho dx dy dz cdt \quad (1.16)$$

де c – питома теплоємність; ρ – густина речовини.

Розглянемо густину теплового потоку q вздовж осі x :

$$q'_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (1.17)$$

де q'_x – густина теплового потоку, що входить в елементарний об'єм в напрямку осі x .

Густину теплового потоку q''_x , що виходить з елементарного об'єму, розкладемо в ряд Тейлора і обмежимося першими двома членами ряду:

$$q_x'' = q_x' + \frac{\partial q_x'}{\partial x} dx \quad (1.18)$$

Загальну кількість теплоти, що надходить в елементарний об'єм, можна подати у вигляді:

$$\delta Q_{\tau l} = \delta Q_{\tau x} + \delta Q_{\tau y} + \delta Q_{\tau z} \quad (1.19)$$

$$\delta Q_{\tau x} = (q_x' - q_x'') dF_{yz} d\tau \quad (1.20)$$

Підставляючи (1.18) в (1.20) отримаємо:

$$\delta Q_{\tau x} = -\frac{\partial q_x'}{\partial x} dx dF_{yz} d\tau \quad (1.21)$$

Підставляючи (1.17) в (1.21) отримаємо:

$$\delta Q_{\tau x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau \quad (1.22)$$

Аналогічно знаходимо $\delta Q_{\tau y}$ и $\delta Q_{\tau z}$:

$$\delta Q_{\tau y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy dx dz d\tau \quad (1.23)$$

$$\delta Q_{\tau z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) dz dx dy d\tau \quad (1.24)$$

Тоді закон збереження теплоти (1.13) для елементарного об'єму прийме вигляд:

$$q_v + \operatorname{div} \lambda \bar{\nabla} t = \rho c \frac{dt}{d\tau} \quad (1.25)$$

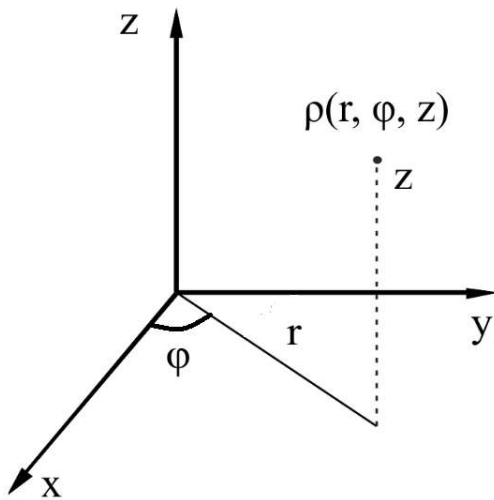
Запишемо оператор Набла в циліндричній та сферичній системах координат (рис. 1.6).

– в циліндричній системі:

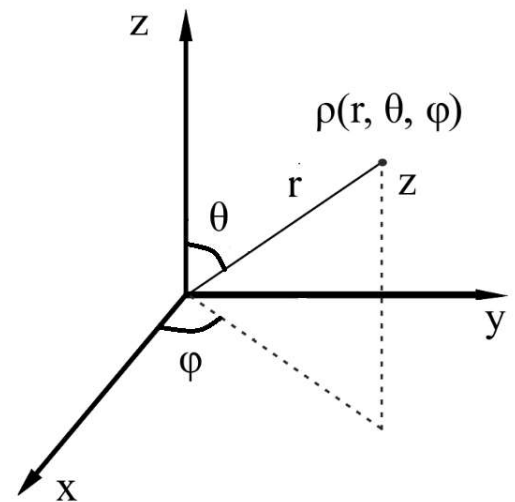
$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

– в сферичній системі:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$



а)



б)

Рис. 1.6. Циліндрична (а) та сферична (б) системи координат

Сферична ортогональна система координат (r, θ, φ) . Зв'язок між Декартовими та сферичними координатами визначається формулами:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

причому $0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Циліндрична ортогональна система координат (r, φ, z) . Зв'язок між Декартовими та циліндричними координатами визначається формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

причому $0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty$.

Розглянемо часткові випадки рівняння (1.25):

$$1. \quad \lambda = \text{const}, q_v = 0$$

$$\Delta t = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{dt}{d\tau} \quad (1.26)$$

де a – коефіцієнт теплопровідності. Він характеризує швидкість зміни температури речовини в нерівноважних теплових процесах. Одиниця вимірювання коефіцієнта теплопровідності в СІ – $\text{м}^2 / \text{с}$; Δ – оператор Лапласа (лапласіан).

$$2. \quad \lambda = \text{const}, q_v = 0, t \neq f(\tau)$$

$$\Delta t = 0 \quad (1.27)$$

$$3. \quad \lambda = \text{const}, q_v = 0, t \neq f(\tau), t = f(y, z)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 t}{\partial^2 z} = 0 \quad (1.28)$$

Єдиність розв'язків рівнянь, наведених в часткових випадках (1 – 3), визначається з умов однозначності. Умови однозначності включають в себе:

- геометричні умови, що характеризують форму та розміри тіла, в яких протікає процес;
- фізичні умови, що характеризують властивості середовища і тіла;
- часові (початкові) умови, що характеризують розподіл температур в досліджуваному тілі в початковий момент часу;
- граничні умови, що характеризують взаємодію досліджуваного тіла з оточуючим середовищем.

Геометричними умовами задаються форма та лінійні розміри тіла, в якому протікає процес.

Фізичними умовами задаються параметри тіла λ , c , ρ та ін. Також може бути заданий закон розподілу внутрішніх джерел теплоти.

Початкові умови необхідні при розгляді нестационарних процесів і задають закон розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу.

Граничні умови можуть бути 1-го, 2-го та 3-го роду.

- а) Граничні умови першого роду. При цьому задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_w = t(x, y, z, \tau) \quad (1.29)$$

де t_w – температура на поверхні тіла; x, y, z – координати на поверхні тіла.

- b) Граничні умови другого роду. При цьому задаються значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла в будь-який момент часу. Аналітично це можна представити наступним чином:

$$q_w = q(x, y, z, \tau) \quad (1.30)$$

де q_w – густина теплового потоку на поверхні тіла.

- с) Граничні умови третього роду. При цьому задаються температура оточуючого середовища t_f та закон теплообміну між поверхнею тіла та оточуючим середовищем [2].

Контрольні питання

1. Які бувають види теплообміну?
2. Дайте визначення теплового потоку.
3. Дайте визначення густини теплового потоку.
4. Сформулюйте закон Фур'є.
5. Який фізичний зміст має коефіцієнт теплопровідності?
6. Сформулюйте закон Ньютона-Ріхмана.
7. Який фізичний зміст має коефіцієнт тепловіддачі?
8. Запишіть рівняння теплопровідності у загальному випадку.
9. Наведіть часткові випадки рівняння теплопровідності.
10. Запишіть як виражається коефіцієнт температуропровідності.
11. Запишіть у Декартових, циліндричних і сферичних координатах градієнт, дивергенцію та оператор Лапласа.
12. Що таке умови однозначності, які вони бувають?
13. Сформулюйте граничні умови першого, другого і третього роду.

РОЗДІЛ II. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ БЕЗ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ

2.1. Одновимірне температурне поле

Загалом строго одновимірних систем не існує. Але дуже часто, в практично важливих випадках з доволі високою точністю систему можна вважати одновимірною, про що і піде мова в даному пункті.

2.1.1. Теплопровідність і теплопередача через плоску стінку

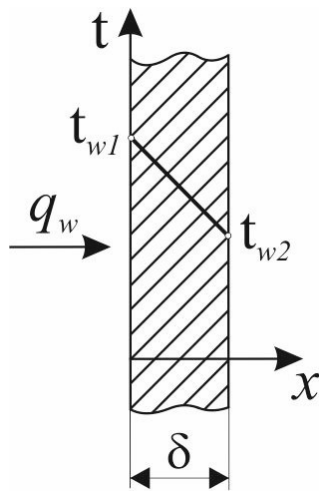


Рис. 2.1. Зміна температури по товщині однорідної плоскої стінки

Розглянемо однорідну та ізотропну стінку товщиною δ зі сталим коефіцієнтом теплопровідності λ . На зовнішніх поверхнях стінки підтримуються сталими температури t_{w1} і t_{w2} .

При заданих умовах температура буде змінюватись тільки в напрямку, перпендикулярному площині стінки. Якщо вісь Ox направити, як показано на рис. 2.1, то температура в напрямку осей Oy та Oz буде залишатися сталою, тобто:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

В зв'язку з цим диференціальне рівняння теплопровідності для даного випадку запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

Граничні умови в даній задачі сформулюємо наступним чином:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{w_1}; \text{ при } x = \delta \quad t = t_{w_2} \quad (2.2)$$

Рівняння (2.1) та умови (2.2) дають повне математичне формулювання даної задачі.

В результаті розв'язку поставленої задачі повинен бути знайдений розподіл температури в пласкій стінці, тобто $t = f(x)$, та отримана формула для визначення кількості тепла, що проходить в одиницю часу через стінку.

Закон розподілу температур по товщині стінки знайдемо в результаті подвійного інтегрування рівняння (2.1).

Перше інтегрування дає:

$$\frac{dt}{dx} = C_1 \quad (2.3)$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$

З рівняння (2.4) випливає, що при сталому коефіцієнті теплопровідності температура в стінці змінюється по лінійному закону.

Сталі C_1 та C_2 в рівнянні (2.4) визначаються з граничних умов:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{w_1} \text{ та } C_2 = t_{w_1};$$

$$\text{при } x = \delta \quad t = t_{w_2} \text{ та } C_1 = -\frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta} x.$$

Підставляючи значення констант C_1 і C_2 в рівняння (2.4), отримуємо закон розподілу температури в даній пласкій стінці:

$$t = t_{w_1} - \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta} x \quad (2.5)$$

Оскільки густина теплового потоку визначається як

$$q_w = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} \quad (2.6)$$

То з урахуванням (2.3) та виразу для C_l отримаємо:

$$q_w = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}) \quad (2.7)$$

З рівняння (2.7) можна зробити висновок, що питомий тепловий потік, що проходить за одиницю часу, прямо пропорційний теплопровідності λ , різниці температур на зовнішніх поверхнях стінки $(t_{w_1} - t_{w_2})$ та обернено пропорційний товщині стінки δ .

Відношення λ/δ , Вт/(м²·К) називають тепловою провідністю стінки, а обернену величину δ/λ , (м²·К)/Вт, – термічним опором теплопровідності стінки [3].

Використовуючи поняття термічного опору, формулу розрахунку густини теплового потоку можна представити у вигляді:

$$q_w = \frac{(t_{w_1} - t_{w_2})}{R} \quad (2.8)$$

де $R = \frac{\delta}{\lambda}$ – термічний опір.

Загальна кількість теплоти, що передається через стінку площею F за одиницю часу:

$$q_w F = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}) F \quad (2.9)$$

Приклад. Дана модель може, наприклад, бути застосована для розрахунку потоку тепла через віконну раму, якщо температура в приміщенні і назовні суттєво не змінюється. З певними наближеннями в цьому випадку систему можна вважати стаціонарною одновимірною. Склопакет у вікні може бути заповнений: 1) повітрям з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda=0.025 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ (нормальні умови), 2) аргоном з $\lambda=0.0164 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ та криптоном з $\lambda=0.0095 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$. Використовуючи означення термічного опору і формулу (2.8) легко бачити, що при однакових значеннях теплового потоку використання аргону дає змогу зменшити товщину склопакета більш ніж в 1.5 рази у порівнянні з повітрям, а використання криптону – більше ніж в 2.6 рази.

Теплопередача через пласку стінку. В техніці часто доводиться розраховувати стаціонарний процес переносу теплоти від одного теплоносія до другого через розділюючу стінку. Такий процес називається теплопередачею.

Розглянемо теплопередачу між двома рідинами через розділюючу їх одношарову пласку стінку (рис. 2.2). Тут передача теплоти ділиться на три процеси:

1) Спочатку теплота передається від гарячого теплоносія t_{f1} до поверхні стінки шляхом конвективного теплообміну, котрий може супроводжуватись випромінюванням. Інтенсивність процесу тепловіддачі характеризується коефіцієнтом тепловіддачі α_1 .

2) Потім теплота теплопровідністю переноситься від однієї поверхні стінки до іншої, що характеризується коефіцієнтом теплопровідності λ .

3) І, нарешті, теплота знову шляхом конвективного теплообміну передається від поверхні стінки до холодної рідини t_{f2} . Цей процес характеризується коефіцієнтом тепловіддачі α_2 .

При стаціонарному режимі густина теплового потоку у всіх трьох процесах однакова і може бути записана наступним чином:

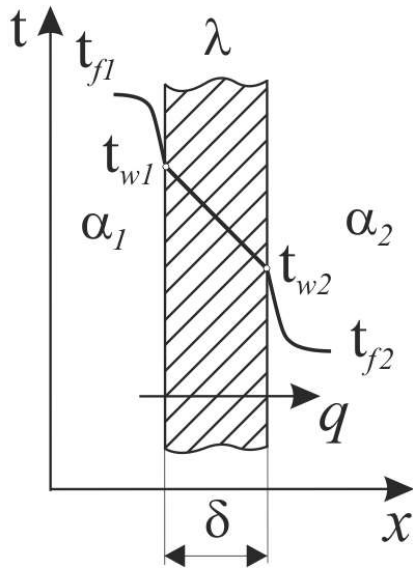


Рис. 2.2. Розподіл температури при теплопередачі через одношарову пласку стінку

1) по закону Ньютона – Ріхмана:

$$q = \alpha_1 (t_{f1} - t_{w1}) = \frac{1}{R_{\alpha_1}} (t_{f1} - t_{w1}) \quad (2.10)$$

2) по закону Фур'є:

$$q = \frac{\delta}{\lambda} (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R_{\lambda}} \quad (2.11)$$

3) по закону Ньютона – Ріхмана:

$$q = \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}) = \frac{1}{R_{\alpha_2}} (t_{w2} - t_{f2}) \quad (2.12)$$

де $R_{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1}$ та $R_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2}$ – термічний опір

зовнішній тепловіддачі відповідно від гарячого теплоносія до стінки і від стінки до холодного теплоносія.

З вищенаведених рівнянь складемо систему:

$$\begin{cases} t_{f1} - t_{w1} = qR_{\alpha_1} \\ t_{w1} - t_{w2} = qR_{\lambda} \\ t_{w2} - t_{f2} = qR_{\alpha_2} \end{cases} \quad (2.13)$$

додавши праві і ліві частини, отримаємо рівняння теплопередачі через одношарову пласку стінку:

$$t_{f_1} - t_{f_2} = q(R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_2}) \quad (2.14)$$

або

$$q = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_2}} = \frac{\Delta t}{R_k}, \quad (2.15)$$

де $\Delta t = (t_{f_1} - t_{f_2})$ – температурний напір, що задається умовами задачі, R_k – термічний опір теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного.

Величина, обернена R_k , називається коефіцієнтом теплопередачі K :

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.16)$$

Коефіцієнт теплопередачі K характеризує інтенсивність процесу теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного через розділюючу їх стінку [3].

Тоді рівняння теплопередачі можна записати:

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{R_k}$$

або

$$Q = K(t_{f_1} - t_{f_2})F \quad (2.17)$$

Граничні температури визначаються:

$$\begin{aligned} t_{w1} &= t_{f1} - qR_{\alpha_1} \\ t_{w2} &= t_{f2} - qR_{\alpha_2} \end{aligned}.$$

2.1.2 Теплопровідність і теплопередача через циліндричну стінку

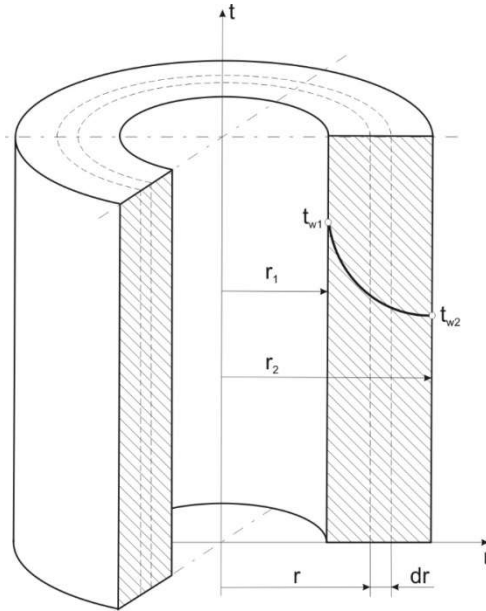


Рис. 2.3. Изменение температуры по толщине однослойной цилиндрической стенки

Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в циліндричній стінці (трубі) з внутрішнім діаметром $d_1 = 2r_1$ та зовнішнім – $d_2 = 2r_2$ (рис. 2.3).

На поверхні стінки задані сталі температури t_{w1} и t_{w2} . В заданому інтервалі температур коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки λ є сталою величиною. Необхідно знайти розподіл температур в циліндричній стінці і тепловий потік через неї.

В даному випадку диференційне рівняння теплопровідності зручно записати в циліндричній системі координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

При цьому вісь OZ суміщена з віссю труби.

При заданих умовах температура змінюється тільки в радіальному напрямку, і температурне поле буде одновимірним. Тому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (2.19)$$

Крім того, так як температури на зовнішній та внутрішній поверхнях труби незмінні, ізотермічні поверхні є циліндричними, що мають з трубою спільну вісь. Тоді температура не повинна змінюватись також вздовж φ , тобто

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.20)$$

З урахуванням (2.19) та (2.20) рівняння (2.18) приймає вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (2.21)$$

Граничні умови:

$$\text{при } r = r_1 \quad t = t_{w_1}; \text{ при } r = r_2 \quad t = t_{w_2} \quad (2.22)$$

Введемо нову змінну

$$u = \frac{dt}{dr} \quad (2.23)$$

Тоді

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{u}{r} \quad (2.24)$$

Підставляючи (2.24) в рівняння (2.21), отримаємо:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \quad (2.25)$$

Інтегруючи (2.25), отримаємо:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 \quad (2.26)$$

Потенціюючи вираз (2.26) і повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r} \quad (2.27)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2 \quad (2.28)$$

Сталі C_1 і C_2 можна визначити, якщо в рівняння (2.28) підставити граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{w_1}, \text{ отсюда } t_{w_1} &= C_1 \ln r_1 + C_2; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{w_2}, \text{ отсюда } t_{w_2} &= C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Розв'язок рівняння (2.29) відносно C_1 та C_2 дає:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \\ C_2 &= t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \end{aligned}$$

Підставив значення C_1 та C_2 в рівняння (2.28), отримаємо:

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

або

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.30)$$

Отриманий вираз являє собою рівняння логарифмічної кривої. Та обставина, що розподіл температури в циліндричній стінці являється криволінійним, можна пояснити наступним. У випадку пласкої стінки питомий тепловий потік q лишається однаковим для всіх ізотермічних поверхонь. З цієї причини градієнт температури зберігає для всіх ізотермічних поверхонь сталу величину.

У випадку циліндричної стінки густина теплового потоку через будь-яку ізотермічну поверхню буде величиною змінною, так як величина поверхні залежить від радіусу.

Для знаходження кількості тепла, що проходить через циліндричну поверхню величиною F в одиницю часу, можна скористатись законом Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F$$

Підставляючи в рівняння закону Фур'є значення градієнта температури згідно рівняння (2.30), отримаємо:

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(t_{w_1} - t_{w_2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.31)$$

З рівняння (2.31) випливає, що кількість тепла, що проходить через циліндричну стінку в одиницю часу, повністю визначається заданими граничними умовами і не залежить від радіуса.

Тепловий потік (2.31) може бути віднесений або до одиниці довжини труби, або до одиниці внутрішньої або зовнішньої поверхні. При цьому розрахункові формули для питомих теплових потоків приймають вигляд:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловий потік через одиницю внутрішньої поверхні);

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловий потік через одиницю зовнішньої поверхні);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(потік тепла, що проходить через одиницю довжини труби).

Тепловий потік, віднесений до одиниці довжини труби, має розмірність Вт/м і називається лінійною густиною теплового потоку [2].

Теплопередача через циліндричну стінку. Розглянемо однорідну циліндричну стінку (трубу) зі сталим коефіцієнтом λ (рис. 2.4).

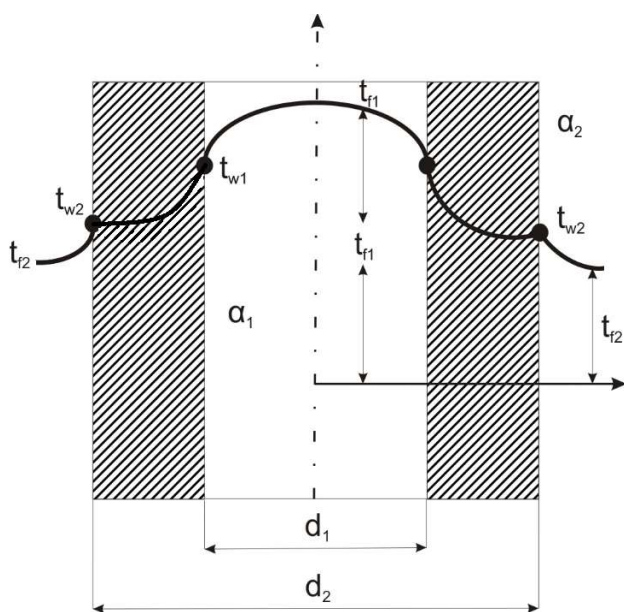


Рис. 2.4. Розподіл температур по товщині циліндричної стінки

Дано постійні температури рухомих середовищ t_{f1} та t_{f2} і сталі значення коефіцієнтів тепловіддачі на внутрішній та зовнішній поверхнях труби α_1 та α_2 . Вважатимемо, що довжина труби велика по відношенню до товщини стінки.

Тоді втратами тепла з торців труби можна знехтувати і при тепловому режимі, що встановився, кількість тепла, що буде віддаватись

від гарячого середовища до поверхні стінки, проходити через стінку і віддаватись від стінки до холодної рідини, буде одним і тим самим. Відповідно, можна записати:

$$\begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{f1} - t_{w1}); \\ q_l &= \frac{\pi (t_{w1} - t_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{w2} - t_{f2}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Перепишемо ці рівняння наступним чином:

$$\begin{cases} (t_{f_1} - t_{w_1}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ (t_{w_1} - t_{w_2}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}; \\ (t_{w_2} - t_{f_2}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Додаючи рівняння системи (2.33), отримуємо повний температурний напір:

$$t_{f_1} - t_{f_2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)$$

Звідси випливає:

$$q_l = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)} \quad (2.34)$$

Позначимо

$$k_l = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)} \quad (2.35)$$

Величина k_l називається лінійним коефіцієнтом теплопередачі. Вона характеризує інтенсивність передачі тепла від одного рухомого середовища до іншого через стінку, що їх розділює. Величина k_l чисельно дорівнює кількості тепла, що проходить через стінку труби довжиною в 1 м в одиницю

часу від одного середовища до іншого при різниці температур між ними в 1°C .

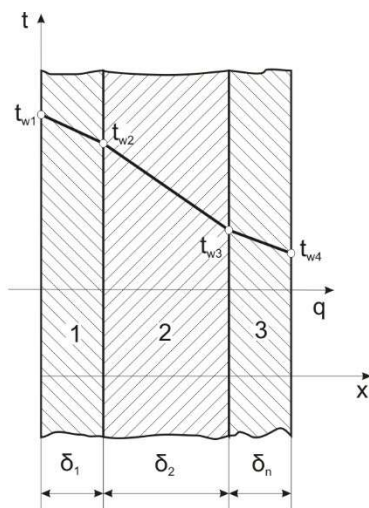
Величина $R_l = \frac{1}{k_l}$, обернена до коефіцієнта теплопередачі, називається

лінійним термічним опором теплопередачі [2]. Вона дорівнює:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (2.36)$$

2.1.3 Теплопровідність і теплопередача через багатошарову пласку стінку. Аналогія з ланцюгами електричного струму

Теплопровідність через послідовну багатошарову пласку стінку.



Розглянемо багатошарову пласку стінку з товщинами шарів $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ і відповідними коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (рис. 2.5). Тут шари щільно прилягають один до одного. В цьому випадку густина теплового потоку визначається по формулі:

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w_{n+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{\Delta t}{\sum_{i=1}^n R_{\lambda_i}} \quad (2.37)$$

Рис. 2.5. Розподіл температур по товщині багатошарової пласкої стінки

де n – число шарів багатошарової стінки; t_{w1} та $t_{w(n+1)}$ – температури на зовнішніх границях багатошарової стінки; $\sum_{i=1}^n R_{\lambda_i}$ – повний термічний опір багатошарової пласкої стінки.

Густина теплового потоку, що проходить через всі шари, в стаціонарному режимі однакова. А так як коефіцієнт теплопровідності λ_i

різний, то для пласкої багатошарової стінки розподіл температур являє собою ламану лінію.

Розрахувавши тепловий потік через багатошарову стінку, можна знайти температуру на границі будь-якого шару. Для k -го шару можна записати:

$$t_{w(k+1)} = t_{w1} - q \sum_{i=1}^k R_{\lambda_i} \quad (2.38)$$

Приклад. Нехай стінка пічки складається з внутрішнього шару нержавіючої сталі, товщиною 1,2 см, що вкрита зовнішнім шаром азбестової ізоляції товщиною 5 см. Температура внутрішньої поверхні нержавіючої сталі дорівнює 800 К, а температура зовнішньої поверхні азбесту дорівнює 350 К. Потрібно знайти густину теплового потоку через стінку. Коефіцієнти теплопровідності для сталі і азбесту дорівнюють відповідно $\lambda_1 = 19 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ і $\lambda_2 = 0,7 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

Розв'язок:

Використовуючи формулу (2.38) знайдемо тепловий потік:

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)}. \quad \text{Звідси густина теплового потоку є:}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)} = \frac{800 - 350}{\frac{0,012}{19} + \frac{0,05}{0,7}} = 6245 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Теплопередача через багатошарову послідовну пласку стінку. Аналогічно однорідній пласкій стінці густина теплового потоку через багатошарову пласку стінку (рис. 2.6) може бути записана наступним чином:

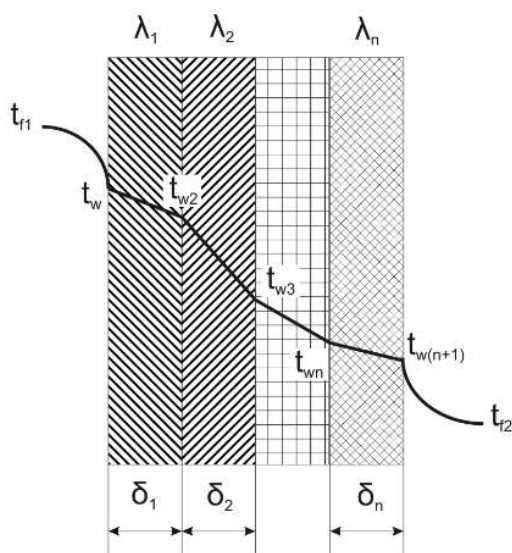


Рис. 2.6. Розподіл температур
при теплопередачі через багатошарову
пласку стінку

1) по закону Ньютона – Ріхмана:

$$q = \alpha_1(t_{f1} - t_{w1}) = \frac{1}{R_{\alpha_1}}(t_{f1} - t_{w1})$$

2) по закону Фур'є:

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w_{n+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{t_{w1} - t_{w_{n+1}}}{\sum_{i=1}^n R_{\lambda_i}}$$

3) по закону Ньютона – Ріхмана:

$$q = \alpha_2(t_{w_{n+1}} - t_{f2})$$

З вищенаведених рівнянь отримаємо рівняння теплопередачі через багатошарову пласку стінку:

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n R_{\lambda_i} + R_{\alpha_2}} = \frac{\Delta t}{R_k} \quad (2.39)$$

де $\Delta t = (t_{f1} - t_{f2})$ – температурний напір, заданий умовами задачі; R_k – термічний опір теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного [2]. Якщо вважати, що тепловий потік аналогічний до електричного струму, то $(\delta/\lambda F)$ можна розглядати, як опір, а різницю температур – як аналог різниці потенціалів. Бачимо, що співвідношення (2.39) має форму, аналогічну до закону Ома.

Величина, обернена R_k , називається коефіцієнтом теплопередачі K :

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.40)$$

Приклад. Теплообмінник пар-рідина з площею зовнішньої поверхні 3200 см² виготовлений з шару нікелю товщиною 0,635 см і вкритий зі сторони пару шаром міді товщиною 0,12 см. Опір шару накипу води з боку пару становить $r_T=0,00205$ (м² год К)/ккал, а коефіцієнти тепловіддачі від пару до стінки і від стінки до рідини відповідно дорівнюють 4700 і 528 ккал/(м² год К). Гріючий пар має температуру 110 °С, а підігріта рідина температуру 74 °С. Визначити загальну тепловіддачу від пару до рідини. Коефіцієнти теплопровідності міді і нікелю дорівнюють відповідно 334 і 50,6 ккал/(м год К).

Розв'язок:

Коефіцієнт теплопередачі визначимо за формулою:

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + r_T + \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{4700} + \frac{1}{528} + 0,00205 + \frac{0,0012}{334} + \frac{0,00635}{50,6}}$$

$$= 235 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{год град}}$$

Тепловий потік через стінку заданої площі буде:

$$Q = 235 \cdot 0,32 \cdot (110 - 74) = 2707,2 \text{ ккал/год.}$$

Теплопровідність через пласку стінку з паралельних секцій.

Електричну аналогію можна застосувати і для розв'язання більш складних задач. Наприклад, для багатошарових стінок, матеріали яких розташовані паралельно один одному. На Рис.2.7. зображена плита, що складається з двох матеріалів, розташованих паралельно один одному, з площами поперечного перерізу відповідно F_1 і F_2 . З правого боку на цьому ж рисунку представлений відповідний тепловий ланцюг. Щоб розв'язати цю задачу при заданій зміні температур поперек плити, кожен шар можна розглядати

окремо за умови, що для кожної з двох секцій перенос тепла можна вважати одновимірним.

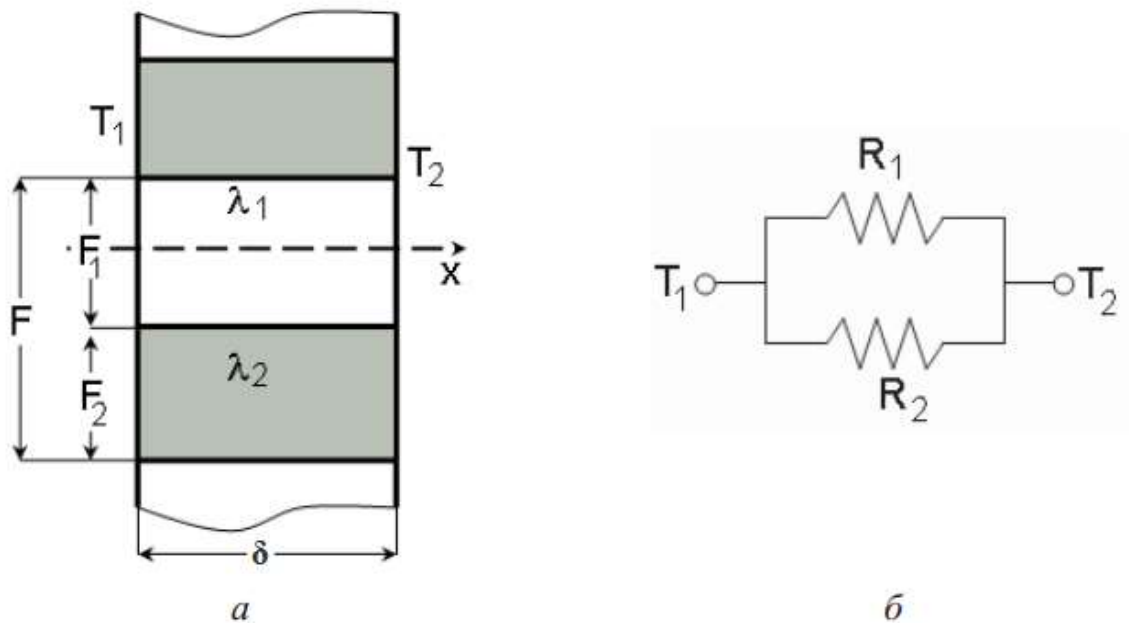


Рис. 2.7. Теплопровідність через плоску стінку з двох паралельних секцій. а) – принципова схема, б) – тепловий ланцюг

Якщо різниця температур між матеріалами, що контактують, мала, то тепловий потік вздовж шарів буде набагато більше теплового потоку у поперечному напрямку. Тому задачу можна вважати одновимірною без будь-якої серйозної втрати точності. Так як теплові потоки для різних матеріалів можна розглядати окремо, то загальний потік буде являти собою арифметичну суму:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda_1 F_1}} + \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda_2 F_2}} = \left(\frac{1}{R_{\lambda_1}} + \frac{1}{R_{\lambda_2}} \right) (T_1 - T_2).$$

Тепловим ланцюгом для цієї задачі є паралельне з'єднання двох термічних опорів R_{λ_1} та R_{λ_2} .

У загальному випадку, при довільній кількості паралельних стінок, повний потік визначатиметься як:

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda_i F_i}} = \sum_i \frac{\Delta T}{R_{\lambda_i}} \quad (2.41)$$

Зазначимо, що загальна площа, яку перетинає тепловий потік, дорівнює сумі всіх окремих площ і що обернена величина сумарного термічного опору дорівнює сумі обернених величин окремих термічних опорів.

Теплопровідність через пласку стінку з послідовно і паралельно з'єднаними секціями. Більш складним прикладом використання поняття теплових опорів є задача про передачу тепла через комбіновану стінку, яка повинна бути представлена за допомогою послідовно і паралельно з'єднаних термічних опорів (Рис.2.8).

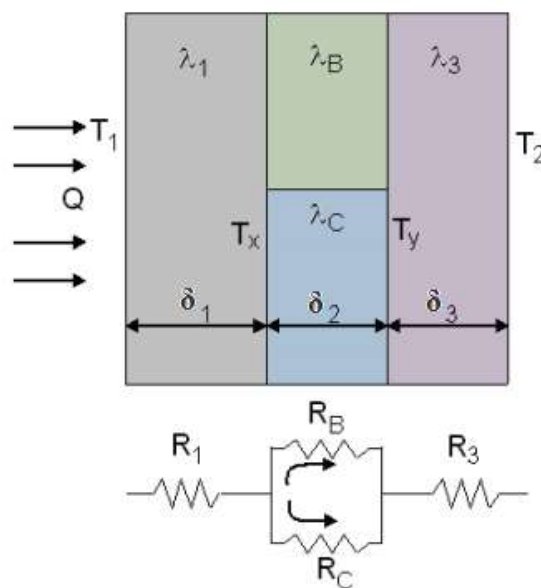


Рис.2.8. Тепловий ланцюг з паралельно і послідовно з'єднаними термічними опорами.

Для такої системи термічний опір середнього шару задається формулою:

$$R_{\lambda_2} = \frac{R_{\lambda B} R_{\lambda C}}{R_{\lambda B} + R_{\lambda C}} \quad (2.42)$$

Тепловий потік визначається наступним чином:

$$Q = \frac{\Delta T}{\sum_{n=1}^N R_{\lambda n}}, \quad (2.43)$$

де N – кількість шарів, $R_{\lambda i}$ – термічний опір кожного шару, ΔT – різниця температур зовнішніх поверхонь:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\lambda_1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1 F_1} \\ R_{\lambda_3} = \frac{\delta_3}{\lambda_3 F_3} \\ R_{\lambda B} = \frac{\delta_2}{\lambda_B F_B} \\ R_{\lambda C} = \frac{\delta_2}{\lambda_C F_C} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

В цій задачі також вважають, що потік тепла є одновимірним. Якщо термічний опір $R_{\lambda B}$ і $R_{\lambda C}$ сильно відрізняються одне від одного, то можуть з'явитися суттєві двовимірні ефекти [5].

Приклад. Прикладом для теплопровідності через комбіновану стінку з послідовно і паралельно з'єднаними секціями може бути кріплення деяких деталей до шасі за допомогою болту (рис.2.9 а). В цьому випадку корпус деталі електрично ізолюваний від шасі шайбами 2 і 4 з електроізоляційних матеріалів, які одночасно є теплоізоляцією.

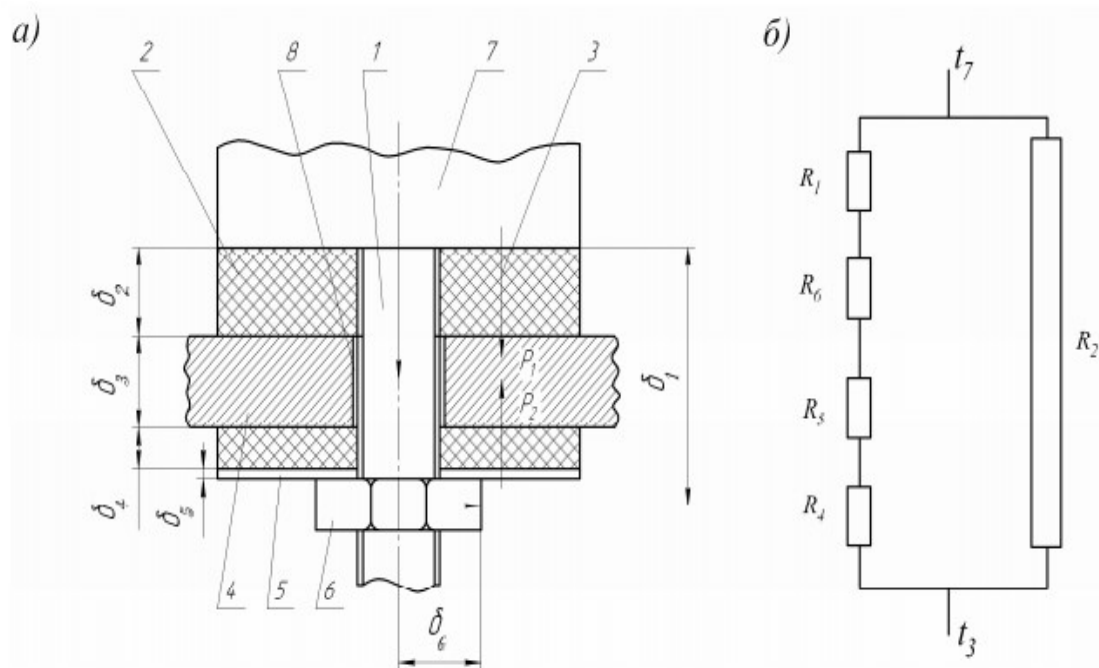


Рис. 2.9. Приклад складного з'єднання стінок. а) – принципова схема, б) – тепловий ланцюг

Болт 1 відділений від шасі повітряним шаром 8, тому теплообмін між болтом і шасі майже відсутній. Тепло від деталі до шасі доходить двома потоками Q_1 і Q_2 . Потік Q_1 проходить безпосередньо через ізоляцію 2, потік Q_2 – більш складним шляхом: від деталі 7 через болт 1, гайку 6, шайбу 5 та шар ізоляції 4. На рис.2.9 а шляхи теплових потоків позначені стрілочками. У даному випадку теплові потоки Q_1 і Q_2 рухаються паралельно, долаючи тепловий опір R_2 ділянки 2 і тепловий опір декількох послідовно з'єднаних елементів. На рис.2.9 б представлена загальна схема з'єднання теплових опорів для цього випадку. Якщо припустити, що тепловий потік, що проходить через окремі ділянки системи, не розсіюється, то результативний тепловий опір R_T закріпленого з'єднання знайдемо на основі закону Кірхгофа, а саме:

$$R_k = \frac{R_{\lambda_2} R'_{\lambda}}{R_{\lambda_2} + R'_{\lambda}} \quad (2.45)$$

$$R_{\lambda_2} = \frac{\delta_2}{\lambda_2 F_2}, \quad (2.46)$$

$$R'_\lambda = \frac{\delta_1}{\lambda_1 F_1} + \frac{\delta_4}{\lambda_4 F_4} + \frac{\delta_5}{\lambda_5 F_5} + \frac{\delta_6}{\lambda_6 F_6}, \quad (2.47)$$

Параметри δ_6 і F_6 у даному прикладі досить умовні, наближені методи їх визначення встановлюються в кожному конкретному випадку.

Ще одним важливим випадком застосування комбінованих багатошарових стінок є будівництво. На *рис. 2.10* зображено тришарову стінку з теплоізоляційним шаром і зв'язками між шарами.

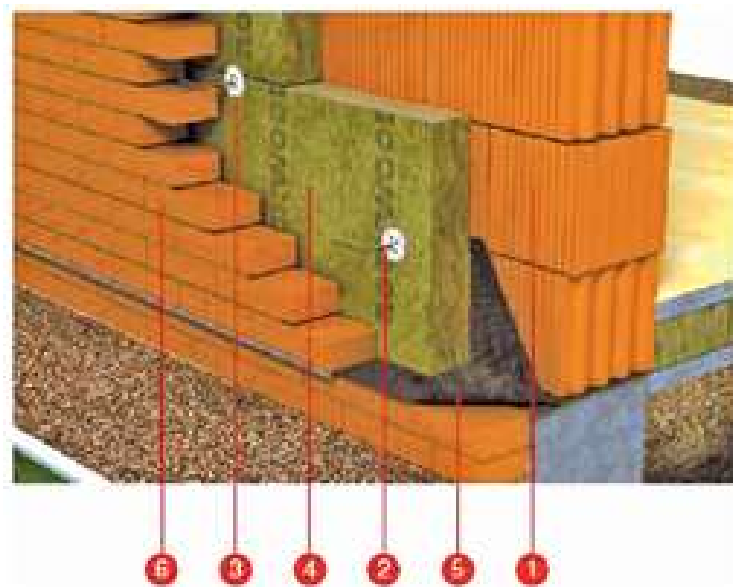


Рис. 2.10. Загальний вигляд утеплення з облицювальним шаром цегли: 1 – внутрішня стінка тришарової стінки; 2 – металеві або склопластикові зв'язки; 3 – притискальна шайба; 4 – теплоізоляційні плити; 5 – гідроізоляція; 6 – зовнішня стінка тришарової стінки.

2.1.4 Теплопровідність і теплопередача через багатошаровий циліндр

Аналогічно пласкій багатошаровій стінці важливим випадком також є багатошарова циліндрична стінка. Розглянемо теплопровідність такої стінки, що складається з n однорідних шарів. Вважатимемо, що контакт між шарами ідеальний і температура на поверхнях сусідніх шарів, що дотикаються

однакова. Задані температури на зовнішніх поверхнях стінки, коефіцієнти теплопровідності і товщина шарів.

Для даного випадку можна скласти наступну систему рівнянь:

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}};$$

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_2} - t_{w_3})}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}};$$

.....

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_n} - t_{w_{n+1}})}{\frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}}.$$

В цьому випадку лінійна густина теплового потоку визначається по формулі:

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_{n+1}})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (2.48)$$

Величина $\frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$ має розмірність м·К/Вт і називається лінійним термічним опором окремого шару, а величина

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

являє собою термічний опір всіх шарів і називається повним лінійним термічним опором теплопровідності багат шарової стінки [2].

Типовим прикладом багатошарової циліндричної стінки є труба, по

45

2.1.5 Критична товщина теплової ізоляції

Розглянемо трубу, з накладеною на неї ізоляцією (рис. 2.11) і дослідимо тепловий потік через бокову поверхню шару ізоляції як функцію зовнішнього діаметру ізолюючого шару.

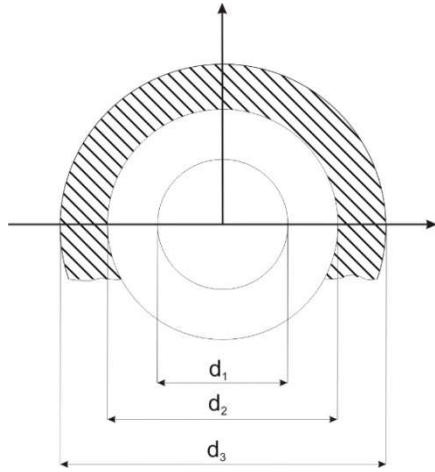


Рис. 2.11. Труба з ізоляційним шаром

Термічний опір теплопередачі для такої труби запишемо:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{iz}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}.$$

Для того щоб з'ясувати, як буде змінюватись величина R_l при збільшенні товщини шару ізоляції, дослідимо R_l як функцію d_3 . Візьмемо похідну від R_l по d_3 і прирівняємо до нуля:

$$\frac{\partial R_l}{\partial d_3} = \frac{1}{2\lambda_{iz}} \frac{1}{d_3} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{d_3^2} = 0$$

Значення d_3 з останнього виразу відповідає точці екстремуму кривої $R_l = f(d_3)$. Точці екстремуму відповідає значення діаметру ізоляції рівне

$$d_{кр} = \frac{2\lambda_{iz}}{\alpha_2}.$$

Продиференціювавши ще раз термічний опір по d_3 і

підставивши екстремальне значення отримаємо:

$$\left. \frac{\partial^2 R_l}{\partial d_3^2} \right|_{d_{кр}} = \frac{1}{d_{кр}} \left(\frac{2}{\alpha_2 d_{кр}} - \frac{1}{2\lambda_{iz}} \right) \bigg|_{d_{кр}} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_{iz}^3} > 0$$

Так як всі величини, що входять в цей вираз, додатні, сама величина також додатна, а значить, значення $d_{кр}$ відповідає мінімальному значенню

термічного опору теплопередачі. Тепловий потік при цьому буде максимальним (рис. 2.12). Тобто, зі збільшенням товщини теплової ізоляції тепловий потік через бокову поверхню ізоляції змінюється немонотонно. Цей, неочевидний, на перший погляд, факт пояснюється тим, що тепловий опір теплопередачі складається з двох конкуруючих факторів. Збільшення товщини шару ізоляції призводить до зменшення теплопровідності, але, в той же час, збільшується зовнішня площа поверхні, що веде до інтенсифікації тепловіддачі. Сумарна дія цих факторів в результаті і призводить до функції з мінімумом.

Значення зовнішнього діаметра труби, що відповідає мінімальному повному термічному опору теплопередачі, називається критичним діаметром і позначається $d_{кр}$. Розраховується критичний діаметр по формулі

$$d_{кр} = \frac{2\lambda_{із}}{\alpha_2} \quad (2.52)$$

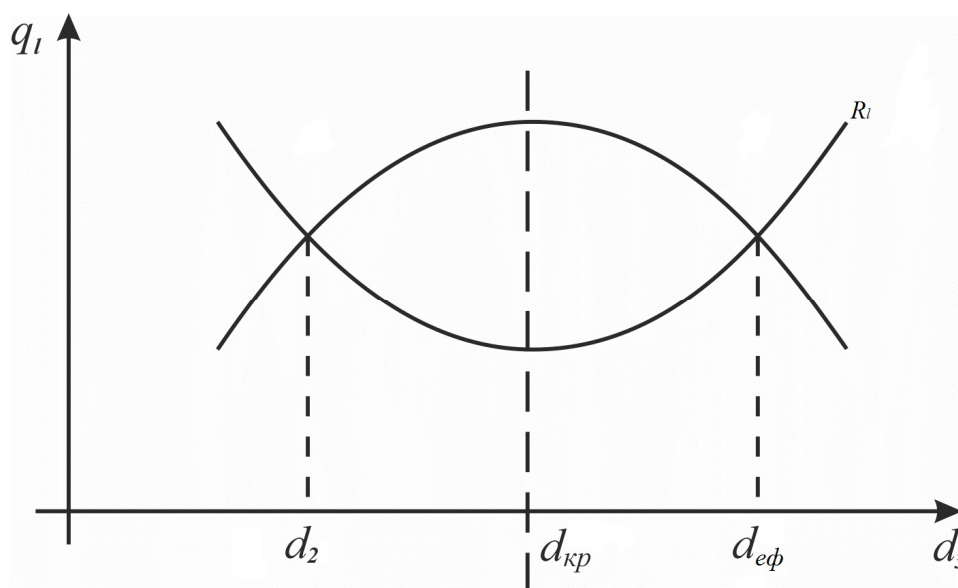


Рис. 2.12. Графік залежності q_l від d_3

Поняття критичного діаметра необхідно при виборі матеріалу ізоляції. Якщо з'ясується, що для певного матеріалу ізоляції критичний діаметр

ізоляції більше ніж діаметр самої труби, то сенсу в такій ізоляції нема. На *рис. 2.12* як раз зображена така ситуація. Видно, що при діаметрі труби, рівному d_2 , шар ізоляції з зовнішнім діаметром від d_2 до $d_{кр}$ призводить тільки к зростанню теплового потоку (відповідно і втрат). Починаючи з діаметра $d_{кр}$ тепловий потік починає зменшуватись і, при досягненні значення $d_{кр}$, стає рівним потоку для труби без ізоляції. Очевидно, що при виборі матеріалу ізоляції необхідно спочатку розрахувати критичний діаметр і переконатись, що він менший за зовнішній діаметр труби.

Приклад. Трубу з зовнішнім діаметром 30 мм необхідно покрити шаром теплоізоляції. Можливими варіантами є мінеральна вата, з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_v = 0,04 \frac{Вт}{м \cdot К}$, і азбест, з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_{аз} = 0,1 \frac{Вт}{м \cdot К}$. Коефіцієнт тепловіддачі в зовнішнє середовище в обох випадках $\alpha_2 = 5 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$. Який матеріал доцільніше вибрати в якості теплоізолятора?

Розв'язок.

Критичний діаметр ізоляції:

$$d_{кр}^v = \frac{2\lambda_v}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 0,04}{5} = 0,016 м = 16 мм \text{ для мінеральної вати}$$

$$d_{кр}^{аз} = \frac{2\lambda_{аз}}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 0,1}{5} = 0,04 м = 40 мм \text{ для азбесту.}$$

Отже, в даному випадку азбест я якості матеріалу ізоляції використовувати недоцільно, так як для нього критичний діаметр більше ніж діаметр труби. Натомість мінеральна вата є непоганим варіантом.

2.1.6 Теплопровідність і теплопередача через сферичну стінку

Нерідко в техніці зустрічаються випадки, коли стінку апарату можна наближено вважати сферичною. Як приклад можна навести деякі типи балонів, котли тощо. Важливо знати закони теплопередачі в таких системах і

в деяких випадках температурне поле сферичної стінки можна вважати одновимірним.

Теплопровідність через сферичну стінку. Нехай маємо порожнисту кулю з радіусами r_1 та r_2 і сталим коефіцієнтом теплопровідності λ . При заданих рівномірно розподілених температурах на поверхнях кулі t_{w1} і t_{w2} , температура буде змінюватись тільки в напрямку радіуса.

В цьому випадку, для отримання кривої температурного поля і кількості тепла, що передається через сферичну стінку, можна скористатись законом Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dt}{dr} \quad (2.53)$$

Якщо проінтегрувати вираз (2.53) і визначити сталу інтегрування з граничних умов: при $r = r_1$ $t = t_{w1}$; при $r = r_2$ $t = t_{w2}$, отримаємо:

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_{w1} - t_{w2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda\Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t,$$
$$t = t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d} \right). \quad (2.54)$$

Ці рівняння є розрахунковими формулами теплопровідності сферичної стінки. З рівняння (2.54) слідує, що при постійному λ температура в сферичній стінці змінюється по закону гіперболи.

Теплопередача через сферичну стінку. При заданих граничних умовах третього роду, крім r_1 та r_2 , будуть відомі t_{f1} та t_{f2} , а також коефіцієнти тепловіддачі на поверхні сферичних стінок α_1 і α_2 . Величини t_{f1} і t_{f2} , α_1 і α_2 вважаються сталими в часі, а α_1 і α_2 – й по поверхням.

Оскільки процес стаціонарний і повний тепловий потік буде постійним для всіх ізотермічних поверхонь, то можна записати:

$$Q = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{f_1} - t_{w_1})$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{w_1} - t_{w_2})$$

$$Q = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{w_2} - t_{f_2})$$

З цього слідує, що:

$$Q = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = \pi K_c (t_{f_1} - t_{f_2}) \quad (2.55)$$

Величина

$$K_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

називається коефіцієнтом теплопередачі сферичної стінки.

Обернена величина

$$\frac{1}{K_c} = R_c = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

називається термічним опором теплопередачі сферичної стінки.

Як і у випадку з циліндричною стінкою виникає ситуація, що характеризує критичну товщину теплоізоляції для сферичної стінки:

$$d_{кр} = \frac{4\lambda_{из}}{\alpha_2} \quad (2.56)$$

$$\lambda_{из} < \frac{\alpha_2 d_{кр}}{4} \quad (2.57)$$

Таким чином, для сферичної стінки коефіцієнт теплопровідності матеріалу ізоляції повинен бути вдвічі менше, ніж для циліндричної стінки при однакових інших параметрах [2].

2.2. Двовимірне температурне поле

Розглянемо системи, де тепло розповсюджується в двох напрямках.

2.2.1. Двовимірне температурне поле в напівобмеженій адіабатній пластині

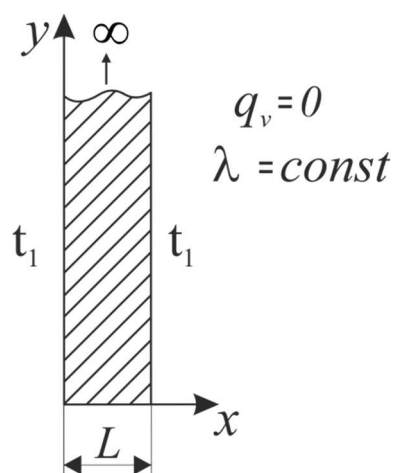


Рис. 2.13. Напівобмежена
пластина

Розглянемо суцільну пласку пластину, що не має внутрішніх джерел тепла і розташовану в першому квадранті координатної площини (X, Y) . Границі пластини: $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = \infty$ (рис. 2.13)

Таке тіло називають напівобмеженням, так як один з його розмірів необмежений. Нехай на трьох краях пластини $x = 0$, $x = L$, $y = \infty$ підтримується стала температура t_1 , а вздовж четвертого краю

$y = 0$ – сталий в часі довільний розподіл температури $t = f(x)$. Так як вважається, що пластина відносно тонка, то температурним градієнтом $\frac{dt}{dz}$ можна знехтувати, і, таким чином, температурне поле стає двовимірним [1].

Якщо коефіцієнт теплопровідності пластини сталий ($\lambda = \text{const}$), а її поверхні ідеально ізольовані від теплообміну з оточуючим середовищем ($q_v = 0$), то температурне поле такої пластини має задовольняти рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2.58)$$

при граничних умовах:

$$\begin{cases} x = 0, t = t_1 \\ x = L, t_1 = t \\ y \rightarrow \infty, t = t_1 \\ y = 0, t = f(x) \end{cases} \quad (2.59)$$

Дана задача є частковим випадком задачі Штурма-Ліувілля. Введемо змінну $T = t - t_1$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Тоді нові граничні умови будуть:

$$\begin{cases} x = 0, T = 0 \\ x = L, T = 0 \\ y \rightarrow \infty, T = 0 \\ y = 0, T = f(x) - t_1 = \Phi(x) \end{cases}$$

Для розв'язку даного рівняння скористаємось методом розділення змінних. Вважатимемо, що розв'язок для $T(x, y)$ має вигляд $T = XY$, де $X = X(x)$ і $Y = Y(y)$. Тоді рівняння (2.58) можна записати у вигляді:

$$X''_x Y + Y''_y X = 0, \text{ або, поділивши на } XY, \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Перенесемо всі функції, що залежать від X вліво, а всі функції, що залежать від Y – вправо. Отримаємо: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. Але так як функції в лівій і правій частині залежать від різних змінних, їх рівність можлива тільки в тому випадку, якщо і ліва і права частина рівна деякій константі, яку для зручності позначимо $-\mu^2$. Отримаємо: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\mu^2$. Це рівняння еквівалентно системі:

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' - \mu^2 Y = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Таким чином, ми перейшли від рівняння в часткових похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Загальним розв'язком першого рівняння системи (2.60) є суперпозиція гармонічних функцій, а другого – експонент:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \\ Y(y) = C_3 e^{\mu y} + C_4 e^{-\mu y} \end{cases}$$

Для того, щоб розв'язок задовольняв першу граничну умову, тобто при $x = 0$, $T = 0$ має виконуватись $C_1 = 0$. Аналогічно, при

$y \rightarrow \infty$; $T = 0$; $C_3 = 0$. Відповідно, загальний розв'язок можна записати у вигляді:

$$T = C_2 \sin \mu x \cdot C_4 e^{-\mu y} = C e^{-\mu y} \sin \mu x$$

Для того, щоб розв'язок задовольняв ще одній граничній умові, тобто при $x = L$ $T = 0$, запишемо рівність $0 = C e^{-\mu y} \sin \mu L$, звідки отримаємо $\sin \mu L = 0$, що може виконуватись тільки в тому випадку, якщо для μ виконується рівність: $\mu L = \pi n$, $n \in Z_+$ або $\mu_n = \frac{\pi n}{L}$.

Кожному з послідовних значень n відповідає частковий розв'язок, а кожному частковому розв'язку відповідає своє значення сталої C . Загальний розв'язок отримуємо, як суму часткових розв'язків для всіх послідовних цілих додатних значень n :

$$\begin{aligned} T_n &= C_n \sin \frac{\pi n}{L} x \cdot e^{\frac{-\pi n}{L} y} \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) e^{\frac{-\pi n}{L} y} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Таке сумування припустиме, оскільки розв'язок однорідного диференціального рівняння в часткових похідних також являє собою суму розв'язків при умові, що отриманий ряд є почленно диференційовним.

Для того щоб рівняння (2.61) задовольняло останній граничній умові при $y = 0$, $T = \Phi(x)$, необхідно щоб:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right)$$

Ця рівність є розкладом довільної функції $\Phi(x)$ в нескінченний ряд Фур'є по синусам. Знаходимо його коефіцієнти:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Обидві сталі інтегрування μ і C повністю визначені, і розв'язок приймає вигляд:

$$T = t - t_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{-\frac{\pi n}{L} y} \int_0^L \Phi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx, \quad (2.62)$$

де $\Phi(x) = f(x) - t_1$ [2].

Для того, щоб вираз (2.62) був розв'язком рівняння (2.58) з граничними умовами (2.59), ряд має збігатися і бути двічі почленно диференційовним по x та по y . Покажемо, що ряди з похідних збігаються рівномірно, для цього покажемо збіжність мажорантного ряду. Покладемо, що $|\Phi(x)| < M$ обмежене в заданій області. Оскільки $|\sin x| < 1$, то $|C_n| < 2M$. Продиференціювавши двічі T_n по x та y отримаємо:

$$a_n = \left| \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 e^{-\frac{\pi n}{L} y} \text{ та } b_n = \left| \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 e^{-\frac{\pi n}{L} y}.$$

Перевіримо збіжність таких рядів за ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} e^{-\frac{\pi y}{L}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{\pi y}{L}} < 1. \quad \text{Отже, ряди з похідних}$$

рівномірно збігаються, значить (2.62) є розв'язком рівняння (2.58) з граничними умовами (2.59). В [6] доведена теорема, згідно з якою знайдений розв'язок є єдиним. Загалом не потрібно кожен раз доводити збіжність рядів,

що являють собою розв'язок задач теплопровідності, так як це доводиться в загальному випадку для такого класу задач [7].

Приклад. Визначити температурне поле пластини $t(x, y)$, якщо $t = t_2 = \text{const}$ при $y = 0$.

Розв'язок. В даному випадку $f(x) = t_2$, тому $\Phi(x) = t_2 - t_1$. Обраховуючи інтеграл і підставляючи в попередній вираз, отримаємо:

$$T = t - t_1 = \frac{2}{L}(t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) e^{-\frac{\pi n}{L}y} \frac{L}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \Big|_L^0 \Rightarrow$$

$$1 - \cos \pi n = \begin{cases} 2, & n = 2k + 1, \\ 0, & n = 2k, \quad k \in Z_+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{L}(t_2 - t_1) \sum_{n=2k+1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) e^{-\frac{\pi n}{L}y} \frac{L}{\pi n} = \frac{4}{\pi}(t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \frac{e^{-\frac{\pi n}{L}y}}{n}$$

Остаточний вираз:

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cdot \frac{e^{-\frac{\pi n}{L}y}}{n} = \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{L}y} + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{3\pi}{L}y} \dots \right)$$

$$, \quad k \in Z_+.$$

Легко показати, що за ознакою Д'Аламбера, даний ряд збігається, а тому є розв'язком задачі.

2.2.2. Двовимірне температурне поле в довгому суцільному напівциліндрі

Як приклад використання двовимірного рівняння Лапласа в циліндричних координатах, розглянемо температурне поле $t(r, \varphi)$ в довгому суцільному напівциліндрі, що обмежений поверхнею $r = r_1$, на якій підтримується довільний розподіл температури $t = t(\varphi)$, і діаметральною

площиною, вздовж якої температура стала і рівна t_0 , як показано на (рис. 2.14):

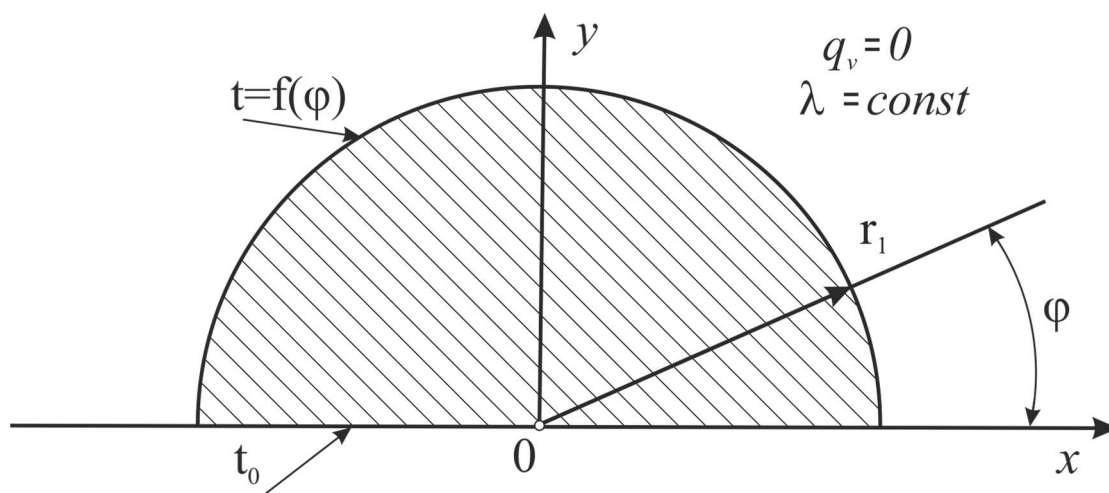


Рис. 2.14. Напівциліндр [1]

Якщо коефіцієнт теплопровідності циліндра сталий ($\lambda = \text{const}$), а його поверхні ідеально ізольовані від теплообміну з оточуючим середовищем ($q_v = 0$), то температурне поле такого циліндра повинно задовольняти рівнянню Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.63)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} t(r, 0) = t(r, \pi) = t_0 \\ t(r_1, \varphi) = f(\varphi) \end{cases} \quad (2.64)$$

Якщо задати різницю температур як $T = t - t_0$, то $T(r, \varphi)$ має задовольняти диференціальне рівняння в часткових похідних:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.65)$$

і граничні умови:

$$\begin{cases} T(r, 0) = T(r, \pi) = 0 \\ T(r_1, \varphi) = f(\varphi) - t_1 = F(\varphi) \end{cases}$$

Як і в попередній задачі, скористаємось методом розділення змінних і запишемо розв'язок для $T(r, \varphi)$ у вигляді $T = R(r)\Phi(\varphi)$. Підставляючи в рівняння (2.65), отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} R_r''\Phi + \frac{1}{r}R_r'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi''_{\varphi} &= 0 \\ r^2R_r''\Phi + rR_r'\Phi + R\Phi''_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Поділимо (2.66) на $R\Phi$ и перенесемо все, що залежить лише від r , в ліву частину, а в праву – все, що залежить лише від φ . Така рівність можлива лише в тому випадку, якщо ліва і права частини рівні константі, яку для зручності позначимо як n^2 :

$$r^2 \frac{R_r''}{R} + r \frac{R_r'}{R} = -\frac{\Phi''_{\varphi}}{\Phi} = n^2.$$

Цей вираз зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} r^2 R_r'' + r R_r' - n^2 R = 0 \\ \Phi_\varphi'' + n^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Загальний розв'язок першого рівняння системи (2.67) знаходимо за допомогою підстановки $R = r^\alpha$. Підставляючи в перше рівняння системи, отримаємо $\alpha^2 = n^2$, звідки випливає, що $\alpha = \pm n$. Розв'язком другого рівняння системи буде суперпозиція гармонічних функцій. Отримуємо нову систему:

$$\begin{cases} R = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \\ \Phi = C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi \end{cases}$$

Так як в точці $r = 0$, $T = 0$, то $C_2 = 0$. При $\varphi = 0$ $T = 0$, тому $C_3 = 0$. Таким чином, частковий розв'язок можна записати у вигляді:

$$T = C r^n \sin n\varphi$$

Для відповідності граничним умовам необхідною є умова $\sin n\pi = 0$, що можливо лише при $n \in Z_+$, і $C = C_n$. Звідси отримуємо загальний розв'язок:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin n\varphi \quad (2.68)$$

Щоб цей розв'язок задовольняв граничній умові $T = f(\varphi) - t_0 = F(\varphi)$ при $r = r_1$ і $0 < \varphi < \pi$, має виконуватись:

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r_1^n \sin n\varphi,$$

де сталі C_n мають бути коефіцієнтами ряду Фур'є, а саме:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) r_1^{-n} \sin n\varphi d\varphi.$$

Звідси запишемо вираз для T :

$$T = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \sin n\varphi \int_0^{\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

і отримуємо остаточний розв'язок у вигляді ряду:

$$t - t_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \sin n\varphi \int_0^{\pi} [f(\varphi) - t_0] \sin n\varphi d\varphi \quad (2.69)$$

Приклад. Знайти розподіл температури в полуміліциліндрі $t(r, \varphi)$, якщо $f(\varphi) = t_1 = \text{const}$.

Розв'язок. Покладемо $F(\varphi) = t_1 - t_0$, і, у відповідності з (2.69), отримуємо ряд:

$$\begin{aligned} \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \sin n\varphi \frac{1}{n} \cos n\varphi \Big|_{\pi}^0 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \sin n\varphi = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{r}{r_1} \sin \varphi + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \sin 3\varphi + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{r_1} \right)^5 \sin 5\varphi + \dots \right), k \in Z_+ \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Які системи називають стаціонарними?
2. Запишіть в загальному випадку стаціонарне рівняння теплопровідності без внутрішніх джерел теплоти.
3. Запишіть одновимірне рівняння теплопровідності для пласкої стінки.
4. Чому буде дорівнювати потік тепла через пласку стінку, якщо температури на поверхнях стінки підтримуються сталими?
5. Дайте означення термічного опору теплопровідності для пласкої стінки. Яка його розмірність?
6. Яким чином можна впливати на величину теплового потоку через пласку стінку?
7. Чому дорівнює потік тепла при теплопередачі від одного середовища до іншого через пласку стінку?
8. Чому дорівнює коефіцієнт теплопередачі через пласку стінку? Яка його розмірність?
9. Запишіть закон Фур'є для циліндричної стінки, у випадку, коли температура змінюється лише вздовж радіуса.
10. Чому дорівнює потік тепла через циліндричну стінку?
11. Запишіть як визначається термічний опір теплопровідності через циліндричну стінку.
12. Чому дорівнює тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через циліндричну стінку? Як визначається коефіцієнт теплопередачі?
13. Як визначити температури на границі різних шарів?
14. Як визначається тепловий потік через багат шарову пласку стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопровідності?

15. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багатшарову пласку стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
16. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багатшарову пласку стінку з паралельним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
17. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багатшарову пласку стінку з комбінованим паралельним і послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
18. В чому суть аналогії розповсюдження тепла з ланцюгами електричного струму? Яким чином при обрахунках теплових потоків можна використовувати закони Кірхгофа?
19. Як визначається тепловий потік через багатшарову циліндричну стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопровідності?
20. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багатшарову циліндричну стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
21. Як визначити температури на границі між шарами?
22. Як визначається тепловий потік через сферичну стінку? Чому дорівнює тепловий опір теплопровідності?
23. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища до іншого через сферичну стінку? Чому дорівнює тепловий опір теплопередачі?
24. Що таке критичний діаметр теплової ізоляції? Чому він дорівнює у випадках циліндричної та сферичної поверхонь?

25. Запишіть рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для напівобмеженої адіабатної пластини. Отримайте загальний розв'язок методом розділення змінних.
26. Запишіть рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для напівобмеженої адіабатної пластини. Отримайте загальний розв'язок методом розділення змінних.
27. Запишіть рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для нескінченного напівциліндра. Отримайте загальний розв'язок у циліндричних координатах методом розділення змінних.

РОЗДІЛ III. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ З ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ

Раніше були розглянуті рівняння теплопровідності для систем без внутрішніх джерел тепла. В той же час, в реальних установках, що використовуються в енергетиці, часто використовуються системи з джерелами тепла. Джерела тепла можуть бути локалізованими або рівномірно розподілятися в середині об'єму тіла. Важливим є вміння розрахунку температурних полів в таких системах.

При дослідженні переносу теплоти в таких випадках важливо знати інтенсивність об'ємного виділення (поглинання) теплоти, яка кількісно характеризується потужністю внутрішніх джерел теплоти q_v , Вт/м³. Якщо величина q_v додатна, кажуть, що в тілі є додатні джерела теплоти. Від'ємні значення q_v означають, що мають місце від'ємні джерела (стоки) теплоти.

3.1. Суцільний круглий стрижень

Розглянемо температурне поле в тілі при рівномірному розподілі внутрішніх джерел теплоти по всьому об'єму. Задачі такого виду доводиться вирішувати при розрахунках тепловиділяючих елементів атомних реакторів, при нагріві тіл струмами високої частоти і в інших випадках.

Розглянемо для прикладу суцільний круглий циліндр (Рис. 3.1), радіус якого малий у порівнянні з довжиною циліндра. При цих умовах температура буде змінюватись тільки вздовж радіуса.

Внутрішні джерела теплоти рівномірно розподілені по об'єму тіла. Задані температура оточуючого середовища $t_f = \text{const}$ і сталий по всій поверхні коефіцієнт тепловіддачі. При цих умовах температура у всіх точках зовнішньої поверхні циліндра буде однаковою.

Для циліндра, як і для пластини, задача буде одновимірною і симетричною. Диференційне рівняння теплопровідності згідно (1.25) при цьому має вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (3.1)$$

де q_v – потужність внутрішніх джерел теплоти; λ – коефіцієнт теплопровідності.

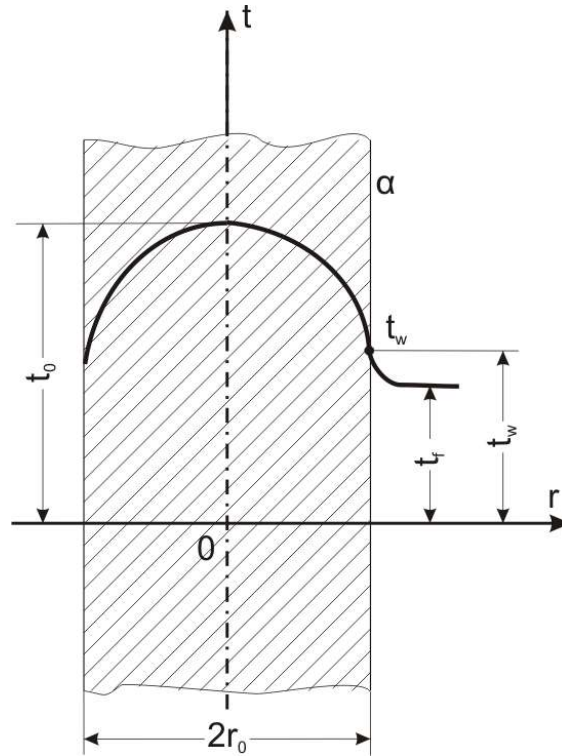


Рис. 3.1. Теплопровідність однорідного циліндричного стрижня за наявності внутрішніх джерел тепла: t_0 – температура на осі; t_w – температура на поверхні.

Задаємо граничні умови:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_w - t_f) \end{cases} \quad (3.2)$$

Необхідно знайти рівняння температурного поля і тепловий потік, а також значення температур на осі t_0 і на поверхні t_w . Проінтегруємо рівняння (3.1). При цьому зробимо заміну $dt / dr = u$. Тоді рівняння (3.1) запишеться:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

Або, після множення на rdr

$$rdu + udr + \frac{q_v}{\lambda} rdr = 0.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$u + \frac{q_v r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r}$$

або

$$\frac{dt}{dr} + \frac{q_v r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r} \quad (3.3)$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2, \quad (3.4)$$

де C_1 і C_2 визначаються з граничних умов (3.2).

При $r=0$ з (3.3) знаходимо, що $C_1=0$. При $r=r_0$ $(dt / dr)_{r=r_0} = -q_v r_0 / 2\lambda$.

Підставляючи останній вираз в граничні умови (3.2) отримаємо:

$$\frac{q_v r_0}{2} = \alpha(t_w - t_f)$$

і

$$t_w = \frac{q_v r_0}{2\alpha} + t_f.$$

З (3.4) знаходимо C_2 :

$$C_2 = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$

Підставляючи C_2 в рівняння (3.4), отримаємо:

$$t = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}(r_0^2 - r^2) \quad (3.5)$$

Отримане рівняння дає можливість обрахувати температуру будь-якої точки циліндричного стрижня. Воно показує, що розподіл температури в круглому стержні підпорядковується параболічному закону.

З рівняння (3.5) при $r=0$ знайдемо температуру на осі циліндра:

$$t_0 = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$

Густина теплового потоку на поверхні циліндра:

$$q = \alpha(t_w - t_f) = \frac{q_v r_0}{2}$$

Повний тепловий потік з поверхні циліндра:

$$Q = qF = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 l = q_v \pi r_0^2 l$$

Приклад. Знайти розподіл температури в тепловиділяючому елементі, що виготовлений з діоксиду урану (UO_2) з тонкостінною оболонкою з нержавіючої сталі. Об'ємна густина джерел тепла $q_v = 4.5 \cdot 10^9$ Вт/м³, радіус стрижня $r_0 = 4.75$ мм, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 64$ Вт/м^{°C}, температура теплоносія (води) $t_f = 40$ °C, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 3.4 \cdot 10^3$ Вт/м²°C. Знайти температуру стінки t_w і температуру на осі твела t_0 .

Розв'язок. Скористаємось формулою (3.5). Розподіл температури:

$$t = 40 + \frac{4.5 \cdot 10^8 \cdot 4.75 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3.4 \cdot 10^3} + \frac{4.5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 2} \left((4.75)^2 - r^2 \right) \approx 1623 - 56.25 r^2$$

показано на *рис. 3.2*. Температура на осі твела $t_0 = 1623$ °C, температура на стінці – $t_w = 354$ °C.

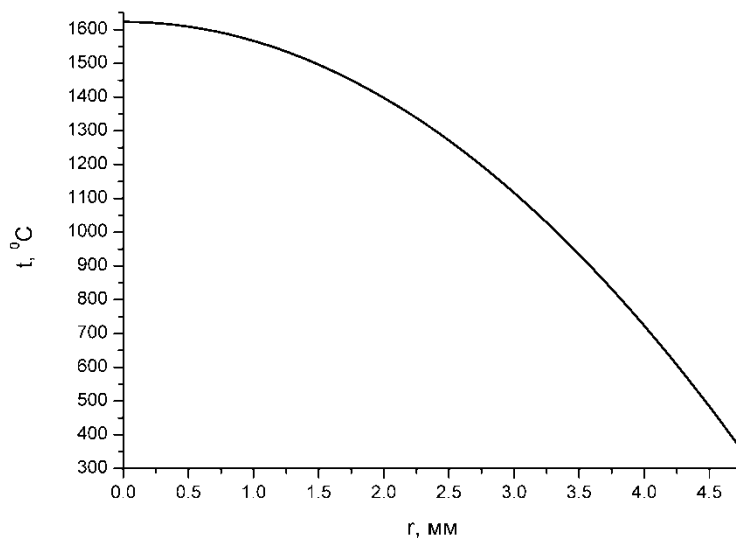


Рис. 3.2. Розподіл температури в тепловиділяючому елементі в залежності від відстані до осі стрижня

3.2. Місцеве джерело теплоти в пластині при неадіабатних умовах

Розглянемо стаціонарний розподіл температури в неізолюваній нескінченній пластині з розміщеним в ній циліндричним джерелом тепла s радіусом r_s (Рис. 3.3). Товщина самої пластини рівна δ , а коефіцієнт її теплопровідності λ вважаємо сталим. Окрім центрального джерела тепла s пластина отримує тепло через зовнішню поверхню 1 від газу з температурою t_{g1} і віддає тепло через зовнішню поверхню 2 газу з температурою t_{g2} . Коефіцієнти тепловіддачі на цих поверхнях рівні відповідно α_1 і α_2 . Величини t_{g1} , t_{g2} , α_1 і α_2 вважаємо сталими. У випадку тонкої пластини з високою провідністю, ми додатково вважаємо, що в напрямку нормалі до зовнішніх поверхонь 1 і 2 нема градієнту температури. Вважатимемо, що загальна кількість тепла, що виділяється джерелом в циліндричному об'ємі $\pi r_s^2 \delta$ рівне Q_0 ккал/год, а джерело має всюди однакову температуру t_0 . Отже, Q_0 і t_0 розглядаються нами як відомі величини. Задача полягає в тому, щоб знайти розподіл температур $t(r)$ в стаціонарному стані для $r_s < r < \infty$.

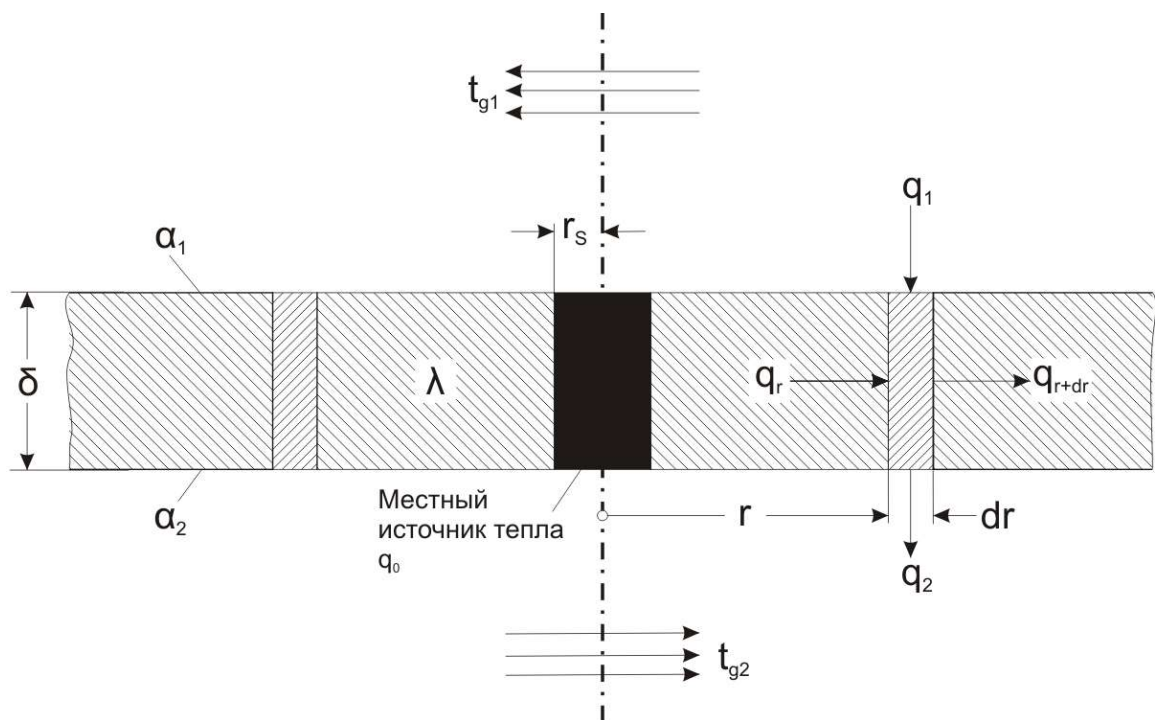


Рис. 3.3. Місцеве джерело тепла в неадіабатній пластині

Виділимо в пластині співвісне з джерелом кільце радіуса r товщиною dr . Площа бокової поверхні кільця рівна $2\pi r\delta$, а площа основи кільця – $2\pi r dr$. Тепловий потік Q_r , котрий входить в кільце через бокову поверхню за рахунок теплопровідності, може бути записаний, використовуючи закон Фур'є:

$$Q_r = -2\pi r\delta\lambda \frac{dt}{dr} \quad (3.6)$$

Тепловий потік Q_{r+dr} , який виходить через бокову поверхню з кільця за рахунок теплопровідності, з огляду на те, що кільце тонке, може бути записаний:

$$Q_{r+dr} = Q_r + \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} \right) dr \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) в (3.7) отримуємо:

$$Q_{r+dr} = -2\pi r\delta\lambda \frac{dt}{dr} - 2\pi\delta\lambda \frac{dt}{dr} dr - 2\pi r\delta\lambda \frac{d^2t}{dr^2} dr \quad (3.8)$$

З зовнішнім середовищем пластина обмінюється енергією шляхом тепловіддачі через верхню і нижню основу кільця. Вважаючи, що $t_{g1} > t_{g2}$ і використовуючи закон Ньютона-Ріхмана, отримаємо вираз для потоків Q_1 і Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\pi r\alpha_1(t_{g1} - t)dr \\ Q_2 &= 2\pi r\alpha_2(t - t_{g2})dr \end{aligned} \quad (3.9)$$

В стаціонарному стані $Q_1 + Q_r - Q_2 - Q_{r+dr} = 0$, тому

$$r^2 \frac{d^2 t}{dr^2} + r \frac{dt}{dr} - \frac{r^2}{\lambda \delta} (\alpha_1 + \alpha_2) \left[t - \frac{\alpha_1 t_{g1} + \alpha_2 t_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] = 0 \quad (3.10)$$

При $r \rightarrow \infty$ $t \rightarrow const$. Відповідно, коли $r \rightarrow \infty$, $\frac{dt}{dr}$ і $\frac{d^2 t}{dr^2}$ прямують до нуля, тобто

$$t_{r \rightarrow \infty} = \frac{\alpha_1 t_{g1} + \alpha_2 t_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2} = \zeta \quad (3.11)$$

При цьому, якщо за нову залежну змінну прийняти $T = t - \zeta$, то диференціальне рівняння (3.10) набуває вигляду:

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} - \varepsilon^2 r^2 T = 0 \quad (3.12)$$

де $\varepsilon^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \delta}$.

Рівняння (3.12) є модифікованим рівнянням Бесселя нульового порядку. Частковим розв'язком такого типу рівнянь є модифіковані функції Бесселя. Детальний теоретичний розгляд функцій Бесселя наводиться в Додатку 1 даного посібника, з котрим бажано ознайомитись до вивчення наступного матеріалу.

Загальний розв'язок рівняння (3.12) є суперпозицією модифікованих функцій Бесселя:

$$T = t - \zeta = C_1 I_0(\varepsilon r) + C_2 K_0(\varepsilon r), \quad (3.13)$$

де I_0 та K_0 є функціями Інфельда і Макдональда нульового порядку. Модифікована функція $I_0(\varepsilon r)$ необмежено зростає по мері того, як її аргумент εr прямує до нескінченності. Таким чином, для того щоб температура $t(r)$ залишалась сталою при $r \rightarrow \infty$, довільна стала C_1 має бути рівна нулю.

Наявність градієнта $\frac{dt}{dr}$ пояснюється виникненням теплового потоку, що бере початок від джерела. При $r \rightarrow r_s$ маємо:

$$Q_0 = -2\pi\lambda\delta r_s \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r_s} = -2\pi\lambda\delta r_s \frac{d}{dr} [C_2 K_0(\varepsilon r)] \Big|_{r_s} = 2\pi\lambda\delta r_s C_2 \varepsilon K_1(\varepsilon r_s).$$

Звідси знаходимо другу довільну сталу:

$$C_2 = \frac{Q_0}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s K_1(\varepsilon r_s)}.$$

Таким чином, радіальний розподіл температури $t(r)$ визначається формулою:

$$t = \zeta + \frac{Q_0}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s} \frac{K_0(\varepsilon r)}{K_1(\varepsilon r_s)} \quad (3.14)$$

3.2. Температурне поле в електричних котушках

Електрична котушка, виконана в тій чи іншій формі, є важливою складовою частиною численних електричних приладів. Розглянути їх усі не є можливим. Для прикладу ми розберемо два види електричних котушок

(суцільну і порожнисту) які являють найбільший інтерес з огляду на широку область технічного застосування від трансформаторів до токамаків.

Формули для точного опису розподілу температури в таких провідниках, а також для розрахунку максимальних температур в точках перегріву являє великий інтерес, особливо якщо врахувати, що часто максимально допустимий струм в котушці (максимальне електричне навантаження) заздалегідь визначається фіксованим значенням максимальної температури, що допускається для матеріалу котушки. Нові конструкції, що розширюють робочі характеристики існуючого обладнання, а також обрахунок безпечних границь перевантаження залежать від такого роду відомостей.

3.2.1 Температурне поле суцільної електричної котушки

Звичайна котушка має спіралевидну або приблизно тороїдальну форму (рис.3.4, 3.5).

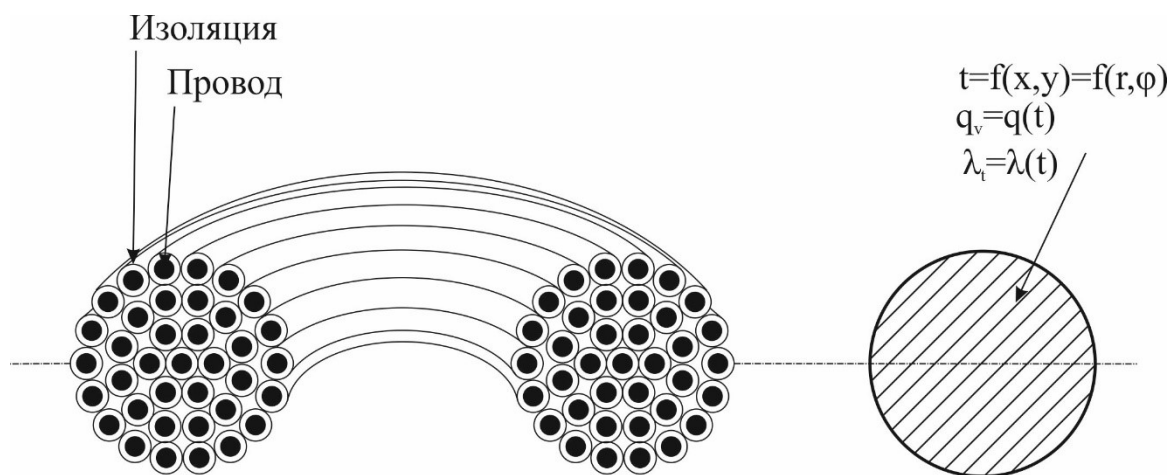


Рис. 3.4. Модель електричної котушки

Зазвичай кривизною поздовжньої осі котушки можна знехтувати і вважати, що довжина цієї осі велика в порівнянні з розмірами профільного поперечного перетину. Це означає, що термічний опір в поздовжньому напрямі настільки перевищує поперечний опір профіля, що все тепло відводиться до поверхні котушки в поперечному напрямі, де воно і

розсіюється в оточуюче середовище з більш низькою температурою. Як правило цим середовищем просто слугує атмосфера, або ж котушка може бути занурена в рідину (нижче буде розглянуто обидва випадки). Занурення в охолоджену рідину або охолодження поверхонь котушки газом ще не забезпечує ізотермічності цих поверхонь.

На практиці реальна тороїдальна котушка зводиться до прямого однорідного бруска (циліндра), в середині якого діють внутрішні джерела тепла.

Потік джоулевого тепла Q в котушці при температурі t буде рівний $Q = I^2 R = I^2 R_0 (1 + \alpha_0 t)$. Об'ємна густина внутрішніх джерел тепла:

$$q_V = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi r_1^2 l}; \quad q_V = q_{V_0} (1 + \alpha_0 t); \quad q_{V_0} = \frac{I^2 R_0}{\pi r_1^2 l},$$

де r_1 – радіус котушки, V – її об'єм, l – довжина.

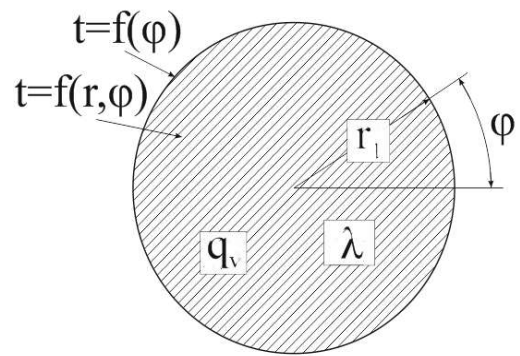


Рис.3.5. Котушка суцільного круглого перерізу

Граничні умови 1 роду. Розглянемо електричну котушку з суцільним круглим профілем і постійним коефіцієнтом теплопровідності λ . Виділення Джоулева тепла відбувається по лінійному закону $q_V = q_{V_0} (1 + \alpha_0 t)$; температура $t(r_1, \varphi)$ поверхні котушки, є довільною функцією азимутального кута φ , тобто $t(\varphi)$.

Згідно (1.25) в цьому випадку стаціонарна температура профіля задовольняє рівняння в часткових похідних:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{q_{V_0} (1 + \alpha_0 t)}{\lambda} = 0 \quad (3.16)$$

Введемо позначення: $\frac{q_{V_0}}{\lambda} = a$ та $\frac{q_{V_0}\alpha_0 t}{\lambda} = bt$. Тоді:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + a + bt = 0 \quad (3.17)$$

Нехай $T = a + bt$, звідси маємо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + bT = 0 \quad (3.18)$$

Будемо шукати розв'язок для $T(r, \varphi)$ у вигляді добутку двох функцій, що залежать від однієї змінної: $T = R(r)\Phi(\varphi)$. Підставивши цей добуток в (3.18) і помноживши на r^2 отримаємо:

$$r^2 R'' \Phi + r R' \Phi + R \Phi'' + r^2 b R \Phi = 0.$$

Розділимо на $R\Phi$:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} + r^2 b = 0.$$

Перенесемо в ліву частину все, що залежить тільки від r , а в праву – все, що залежить тільки від φ . Це можливо тільки в тому випадку, якщо ліва і права частини дорівнюють деякій константі, яку для зручності позначимо μ^2 :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 b = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2.$$

В результаті отримаємо систему з 2 звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 b - \mu^2 = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на R остаточно отримаємо:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (r^2 b - \mu^2)R = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Вводячи заміну $\tilde{r} = \sqrt{b}r$ бачимо, що перше рівняння системи (3.19) зводиться до рівняння Бесселя порядку μ :

$$\begin{cases} \tilde{r}^2 R'' + \tilde{r}R' + (\tilde{r}^2 - \mu^2)R = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases}$$

Відповідні загальні розв'язки цих рівнянь мають вид:

$$R = C_1 J_\mu(\sqrt{b}r) + C_2 Y_\mu(\sqrt{b}r) \quad (3.20)$$

$$\Phi = C_3 \cos \mu\varphi + C_4 \sin \mu\varphi \quad (3.21)$$

Таким чином, частковий розв'язок рівняння (3.18) можна подати у вигляді:

$$T = \left[C_1 J_\mu(\sqrt{b}r) + C_2 Y_\mu(\sqrt{b}r) \right] [C_3 \cos \mu\varphi + C_4 \sin \mu\varphi] \quad (3.22)$$

Проте для циліндра розв'язок має бути періодичним по φ : $T(r, \varphi) = T(r, \varphi \pm 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді з (3.22) слідує, що $\sin(\mu\varphi) = \sin(\mu\varphi + 2\pi\mu n)$ і, аналогічно, для косинуса. Але це означає, що $2\pi\mu n$ має бути періодом, а це можливо лише в тому випадку, якщо μ ціле ($\mu \in \mathbb{Z}_+$). Відповідно, лінійна комбінація розв'язків типу (3.22) з різними константами, що залежать від μ , також є розв'язками рівняння (3.18). Так як функція $T(r, \varphi)$ має залишатись скінченною при $r \rightarrow \infty$, то другий розв'язок рівняння Бесселя $Y_\mu(\sqrt{b}r)$ має бути відкинутий; тому $C_2 = 0$. Позначимо $C_1 C_3$ як M , а $C_1 C_4$ як N . Таким чином, маємо:

$$T = \sum_{\mu=0}^{\infty} [M_\mu \cos \mu\varphi + N_\mu \sin \mu\varphi] J_\mu(\sqrt{b}r) \quad (3.23)$$

Загальний розв'язок (3.23) необхідно узгодити з граничною умовою $t = f(\varphi)$ при $r = r_1$ (рис. 3.5). Підставивши $t(r_1)$ в T перепозначимо нову функцію: $T = a + bf(\varphi) = F(\varphi)$. Підставивши її в (3.23) отримаємо:

$$F(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} [M_\mu \cos \mu\varphi + N_\mu \sin \mu\varphi] J_\mu(\sqrt{b}r_1)$$

Цей вираз є ніщо інше, як розклад в ряд Фур'є довільної функції $F(\varphi)$. Для такого розкладу в інтервалі 2π постійні коефіцієнти M_μ та N_μ визначаються наступним чином:

$$J_\mu(\sqrt{b}r_1) M_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu\varphi d\varphi,$$

та

$$J_{\mu}(\sqrt{b}r_1)N_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi,$$

де треба мати на увазі, що першим коефіцієнтом є $M_0 / 2$. Це дає можливість отримати остаточний розв'язок в формі:

$$T = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sin \mu \varphi \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi + \cos \mu \varphi \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi \right] \frac{J_{\mu}(\sqrt{b}r)}{J_{\mu}(\sqrt{b}r_1)}, \quad (3.24)$$

где $T = a + bt$, $a = \frac{q_{V_0}}{\lambda}$, $b = \frac{q_{V_0} \alpha_0}{\lambda}$.

Приклад. Котушка наполовину занурена в масляну ванну. Знайти $t(r, \varphi)$ якщо поверхня, що контактує з повітрям має температуру t_0 , а поверхня, занурена в масло, – температуру t_1 .

Розв'язок. Граничні температури можна представити через $F(\varphi)$ у вигляді:

$$F(\varphi) = a + bt_0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } 0 < \varphi < \pi,$$

$$F(\varphi) = a + bt_1 \text{ при } r = r_1 \text{ и } 0 < \varphi < 2\pi.$$

Визначимо коефіцієнти розв'язку (3.24) розбивши проміжок інтегрування на два інтервали: $[0; \pi)$ та $[\pi; 2\pi)$. Для першого коефіцієнта при $\mu = 0$ маємо:

$$\begin{aligned}\frac{M_0}{2} &= \frac{1}{J_0(\sqrt{br_1})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = \frac{1}{J_0(\sqrt{br_1})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (a + bt_0) d\varphi + \frac{1}{J_0(\sqrt{br_1})} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (a + bt_1) d\varphi = \\ &= \frac{1}{J_0(\sqrt{br_1})} \left(a + \frac{b}{2}(t_0 + t_1) \right)\end{aligned}$$

Решта коефіцієнтів для $\mu \neq 0$ обраховуються у вигляді:

$$\begin{aligned}N_{\mu} &= \frac{1}{J_{\mu}(\sqrt{br_1})} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi = \frac{1}{J_{\mu}(\sqrt{br_1})} \left(\int_0^{\pi} (a + bt_0) \sin \mu \varphi d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} (a + bt_1) \sin \mu \varphi d\varphi \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{J_{\mu}(\sqrt{br_1})} \frac{2b}{\pi \mu} (t_0 - t_1), & \mu = 2k + 1 \\ 0, & \mu = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi = 0.$$

Звідси розв'язок $t(r, \varphi)$, що задовольняє заданим граничним температурам, дається співвідношенням:

$$t = \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2}(t_0 + t_1) \right) \frac{J_0(\psi)}{J_0(\psi_1)} + \frac{2}{\pi} (t_0 - t_1) \left[\sin \varphi \frac{J_1(\psi)}{J_1(\psi_1)} + \frac{1}{3} \sin 3\varphi \frac{J_3(\psi)}{J_3(\psi_1)} + \dots \right] - \frac{a}{b}$$

в якому $\psi = \sqrt{b}r$ і $\psi_1 = \sqrt{b}r_1$.

Граничні умови 3 роду. Розглянемо котушку з суцільним круглим перерізом, що розсіює тепло в оточуюче газове середовище f . Нехай температура поверхні котушки невідома, дані тільки незмінна температура газу t_f і сталий коефіцієнт тепловіддачі α .

Якщо котушка має постійний коефіцієнт теплопровідності λ , то симетричний розподіл температури $t(r)$ в даному випадку має задовольняти звичайному диференційному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_{V_0}(1 + \alpha_0 t)}{\lambda} = 0 \quad (3.25)$$

і граничній умові:

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_1} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_w - t_f), \quad (3.26)$$

де t_w – температура стіни, t_f – температура середовища.

Знову вводячи змінну $T = a + bt$, ми можемо переписати рівняння (3.25) в формі рівняння Бесселя нульового порядку:

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} + br^2 T = 0 \quad (3.27)$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$T = C_1 J_0(\sqrt{b}r) + C_2 Y_0(\sqrt{b}r)$$

Оскільки при $r=0$ значення температури має набувати кінцевого значення, стала C_2 знову дорівнює нулю. Використаємо умову (3.26)

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_1} = -\frac{C_1}{\sqrt{b}} J_1(\psi_1) = -\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{C_1}{b} J_0(\psi_1) - t_f - \frac{1}{\alpha_0} \right)$$

знаходимо, що стала C_1 дорівнює:

$$C_1 = \frac{\left(t_f + \frac{1}{\alpha_0}\right)b}{J_0(\psi_1) - \gamma J_1(\psi_1)},$$

де $\gamma = \sqrt{q_{V_0} \alpha_0 \lambda} / \alpha$, $\psi_1 = \sqrt{b} r_1$.

Шуканий розв'язок запишемо у вигляді $t = \frac{T - a}{b}$

$$t = \frac{\left(t_f + \frac{1}{\alpha_0}\right)}{J_0(\psi_1) - \gamma J_1(\psi_1)} J_0(\sqrt{b} r) - \frac{1}{\alpha_0} \quad (3.28)$$

3.2.2 Температурне поле порожнистої електричної котушки

Порожнисті профілі є вдосконаленням для котушок генераторів великої потужності з внутрішнім охолодженням. Розглянемо котушку з порожнистим круглим профільним перерізом і сталим коефіцієнтом теплопровідності λ , що зображена на рис. 3.6

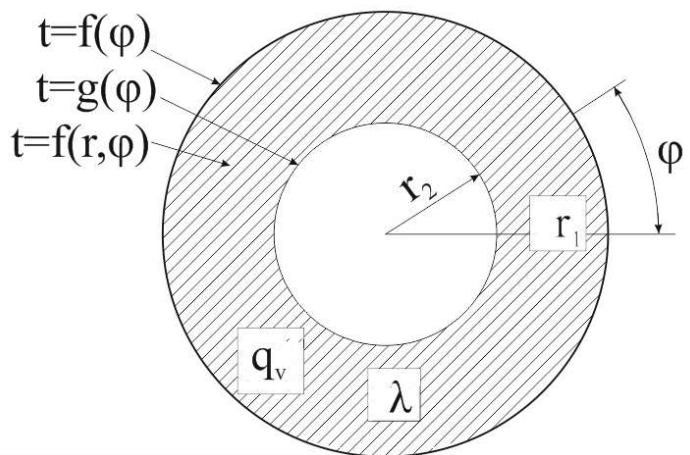


Рис. 3.6 Порожниста котушка круглого перерізу

Джоулево тепло, що виділяється котушкою описується лінійним законом $q_V = q_{V_0}(1 + \alpha_0 t)$, а її поверхневі температури $t(r_1, \varphi)$ і $t(r_2, \varphi)$ є довільними функціями $t = f(\varphi)$ і $t = g(\varphi)$. Використаємо граничні умови 1 роду і опустимо математичні викладки з огляду на їх ідентичність з випадком

суцільної електричної котушки. Знову відповідним диференціальним рівнянням є рівняння (3.18) розв'язком якого, як було встановлено раніше, є простий добуток розв'язків (3.20) і (3.21). Проте в цьому випадку розв'язок Y_μ має бути збережений і $T = R\Phi$ має більш загальну форму:

$$T = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \left[A_\mu J_\mu(\sqrt{b}r) + B_\mu Y_\mu(\sqrt{b}r) \right] \sin \mu\varphi + \left[C_\mu J_\mu(\sqrt{b}r) + D_\mu Y_\mu(\sqrt{b}r) \right] \cos \mu\varphi \right\}. \quad (3.29)$$

Таким чином, підставляючи граничні температури для T у вигляді:

$$T = a + bf(\varphi) = F(\varphi) \quad \text{при } r = r_1 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$T = a + bg(\varphi) = G(\varphi) \quad \text{при } r = r_2 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

отримаємо розклад в ряд Фур'є:

$$F(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \left[A_\mu J_\mu(\psi_1) + B_\mu Y_\mu(\psi_1) \right] \sin \mu\varphi + \left[C_\mu J_\mu(\psi_1) + D_\mu Y_\mu(\psi_1) \right] \cos \mu\varphi \right\}$$

$$G(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \left[A_\mu J_\mu(\psi_2) + B_\mu Y_\mu(\psi_2) \right] \sin \mu\varphi + \left[C_\mu J_\mu(\psi_2) + D_\mu Y_\mu(\psi_2) \right] \cos \mu\varphi \right\}$$

Сталі коефіцієнти, що стоять в дужках, є коефіцієнтами ряду Фур'є і визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
A_\mu J_\mu(\psi_1) + B_\mu Y_\mu(\psi_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi, \\
A_\mu J_\mu(\psi_2) + B_\mu Y_\mu(\psi_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi, \\
C_\mu J_\mu(\psi_1) + D_\mu Y_\mu(\psi_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi, \\
C_\mu J_\mu(\psi_2) + D_\mu Y_\mu(\psi_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

де, у відповідності з попередніми позначеннями, $\psi_1 = \sqrt{b}r_1$ і $\psi_2 = \sqrt{b}r_2$.

Ці чотири співвідношення використовуються для обчислення A_μ, B_μ, C_μ и D_μ , якщо $F(\varphi)$ і $G(\varphi)$ можуть бути виражені як функції свого аргументу в інтервалі 2π . Остаточний розв'язок можна одержати після того, як ми підставимо в (3.29) значення A_μ, B_μ, C_μ и D_μ знайдені шляхом розв'язання системи (3.30) відносно цих сталих.

Приклад 1. Порожниста котушка має сталі граничні температури $f(\varphi) = t_1$ і $g(\varphi) = t_2$. Зайти $t(r)$.

Розв'язок. В даному випадку

$$F(\varphi) = a + bt_1 \text{ при } r = r_1 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi$$

$$G(\varphi) = a + bt_2 \text{ при } r = r_2 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

В системі (3.30) інтеграли обертаються в нуль для всіх значень μ окрім нуля звідки слідує $A_\mu = B_\mu = C_\mu = D_\mu = 0$. І тільки перші коефіцієнти для $\mu = 0$ не обертаються в нуль, а саме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = a + bt_1 \text{ і } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) d\varphi = a + bt_2.$$

Коефіцієнти, відповідно, знаходимо з системи:

$$\begin{aligned}C_0 J_0(\psi_1) + D_0 Y_0(\psi_1) &= a + bt_1 \\C_0 J_0(\psi_2) + D_0 Y_0(\psi_2) &= a + bt_2.\end{aligned}$$

Розв'язуючи дану систему методом Крамера або будь-яким іншим способом отримаємо:

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{\Psi} \left[(a + bt_2) Y_0(\psi_1) - (a + bt_1) Y_0(\psi_2) \right], \\D_0 &= \frac{1}{\Psi} \left[(a + bt_1) J_0(\psi_2) - (a + bt_2) J_0(\psi_1) \right],\end{aligned}$$

де

$$\Psi = J_0(\psi_2) Y_0(\psi_1) - J_0(\psi_1) Y_0(\psi_2).$$

Підставляючи у вираз (3.29) замість довільних сталих знайдені значення, отримаємо остаточний розв'язок, що задовольняє граничним умовам, у формі:

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{\Psi} \left[\left(t_2 + \frac{1}{\alpha_0} \right) Y_0(\psi_1) - \left(t_1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) Y_0(\psi_2) \right] J_0(\psi) + \\&+ \left[\left(t_1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) J_0(\psi_2) - \left(t_2 + \frac{1}{\alpha_0} \right) J_0(\psi_1) \right] Y_0(\psi) - \frac{1}{\alpha_0}.\end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Запишіть стаціонарне рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти.

2. Запишіть рівняння теплопровідності для суцільного круглого стрижня з рівномірно розподіленими внутрішніми джерелами теплоти. Запишіть граничні умови.
3. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для суцільного круглого стрижня з рівномірно розподіленими джерелами теплоти.
4. Запишіть рівняння теплопровідності для адіабатної тонкої пластини з циліндричним джерелом теплоти. Запишіть граничні умови для даної системи.
5. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для тонкої адіабатної системи з циліндричним джерелом теплоти.
6. Запишіть рівняння теплопровідності для суцільної електричної котушки.
7. Запишіть граничні умови 1 роду для рівняння теплопровідності у випадку суцільної електричної котушки. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для даного випадку.
8. Запишіть граничні умови 3 роду для рівняння теплопровідності у випадку суцільної електричної котушки. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для даного випадку.
9. Запишіть рівняння теплопровідності для порожнистої електричної котушки. Як шукається розв'язок у випадку граничних умов 1 роду?
10. Розгляньте частковий випадок порожнистої електричної котушки в якому температури на зовнішній і внутрішній поверхнях котушки стали і не залежать від кута φ . Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для такої системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дульнев Г. Н. Тихонов С. В. Основы теории тепломассообмена - 2010.
2. Исаченко В.П. Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. Учебник для вузов - «Энергия», 1975.
3. Мухачев Г. А. Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача: Учеб. для авиац. вузов.— 3-е изд. Высш. шк., 1991.
4. П. Шнейдер Инженерные проблемы теплопроводности: перевод с английского Москва : Издательство иностранной литературы., 1960.
5. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва: Главная редакция физико-математической литературы, 1974